

## 2. Bit Error Rate Test

**Zadatak 1.** Izračunati potreban broj prenetih informacionih bita u BER testu za 0, 1, 2 i 3 pogrešno detektovana bita na prijemu, tako da se u sistemu sa brzinom signalizacije od 1 Mbps može tvrditi da je verovatnoća greške prenosa manja od  $10^{-9}$  sa nivoom poverenja od 95 %. Koliko je odgovarajuće trajanje BERT-a?

### Rešenje

Potreban broj informacionih bita iznosi

$$n = -\frac{\ln(1-CL)}{p} + \frac{\ln\left(\sum_{k=0}^N \frac{(np)^k}{k!}\right)}{p} \quad (1.1)$$

Za  $N = 0$ , dobija se

$$n_0 = -\ln \frac{\ln(1-CL)}{p} = -\frac{\ln(1-0,95)}{10^{-9}} = 3 \cdot 10^9 \quad (1.2)$$

Ovo odgovara trajanju merenja od 50 min.

Za  $N = 1$

$$n_1 = -\frac{\ln(1-CL)}{p} + \frac{\ln(1+n_1p)}{p} = n_0 + \frac{\ln(1+n_1p)}{p} \quad (1.3)$$

S obzirom da je ln monotona funkcija, moguće je primeniti sledeću rekurzivnu formulu

$$n_1^{(0)} p = n_0 p + \ln(1+n_0 p) \quad (1.4)$$

$$n_1^{(i)} p = n_0 p + \ln(1+n_1^{(i-1)} p) \quad (1.5)$$

Tako se dobija da je

$$\begin{aligned} n_1^{(0)} p &= 4,39 \\ n_1^{(1)} p &= 4,68 \\ n_1^{(2)} p &= 4,74 \\ n_1^{(3)} p &= 4,75 \\ n_1^{(4)} p &= n_1^{(\infty)} p = 4,75 \end{aligned} \quad (1.6)$$

pa je  $n_1 = 4,75 \cdot 10^9$  bita, a trajanje merenja iznosi 1h 19min 10s.

Za  $N = 2$

$$n_2 p = -\ln(1 - CL) + \ln\left(1 + n_2 p + \frac{(n_2 p)^2}{2}\right) = n_0 p + \ln\left(1 + n_2 p + \frac{(n_2 p)^2}{2}\right) \quad (1.7)$$

Rekurzivne formule sada su

$$n_2^{(0)} p = n_0 p + \ln\left(1 + n_1 p + \frac{(n_1 p)^2}{2}\right) \quad (1.8)$$

$$n_2^{(i)} p = n_0 p + \ln\left(1 + n_2^{(i-1)} p + \frac{(n_2^{(i-1)} p)^2}{2}\right) \quad (1.9)$$

Odavde se dobija

$$\begin{aligned} n_2^{(0)} p &= 5,84 \\ n_2^{(1)} p &= 6,17 \\ n_2^{(2)} p &= 6,27 \\ n_2^{(3)} p &= 6,29 \\ n_2^{(4)} p &= 6,30 \\ n_2^{(5)} p &= n_2^{(\infty)} p = 6,30 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Odogovarajuće trajanje merenja je 1h 45min 0s.

Za  $N = 3$  rekurzivne formule postaju

$$n_3^{(0)} p = n_0 p + \ln\left(1 + n_2 p + \frac{(n_2 p)^2}{2} + \frac{(n_2 p)^3}{6}\right) \quad (1.11)$$

$$n_3^{(i)} p = n_0 p + \ln\left(1 + n_3^{(i-1)} p + \frac{(n_3^{(i-1)} p)^2}{2} + \frac{(n_3^{(i-1)} p)^3}{6}\right) \quad (1.12)$$

pa je

$$\begin{aligned} n_3^{(0)} p &= 7,23 \\ n_3^{(1)} p &= 7,58 \\ n_3^{(2)} p &= 7,70 \\ n_3^{(3)} p &= 7,74 \\ n_3^{(4)} p &= 7,75 \\ n_3^{(5)} p &= n_3^{(\infty)} p = 7,76 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Trajanje merenja iznosi 2h 9min 20s.

## 2. Bit Error Rate Test

---

**Zadatak 2.** Prilikom BER testa ISDN komunikacione linije, kroz kanal je propuštena pseudoslučajna sekvenca od  $n = 2^{35}$  informacionih bita. Koliko je trajalo merenje, ako je brzina signalizacije 64 kbps, a redundansa korišćenog protokola iznosi 20 %? Ako na prijemu nije detektovan ni jedan neispravan bit da li je korektno tvrditi da je verovatnoća greške kanala manja od  $10^{-10}$  sa nivoom poverenja od 99 %?...

a) ...Da!

Koliko informacionih bita je potrebno propustiti kroz kanal da bi BERT prošao sa jednom detektovanom greškom? Za koliko bi se u ovom slučaju produžilo merenje?

b) ...Ne!

Sa kolikim se nivoom poverenja  $CL$  može tvrditi da je BERT bio uspešan? Kolika je gornja granica verovatnoće greške kanala  $p(\epsilon)$  koju možemo proglasiti sa nivoom poverenja od 99% na osnovu datog merenja?

c) ...Nema dovoljno podataka!

Koliki nivo poverenja je potrebno usvojiti da bi se BERT mogao proglasiti uspešnim, ako želimo da merenje traje najviše 10 min? Koliki je nivo poverenja, ako je brzina signalizacije u sistemu 64 Mbps?

### Rešenje

Zbog redundantnosti protokola kroz kanal je propušten niz od

$$\hat{n} = n + 20\% \cdot n = 41231686041,6 \text{ bita} \quad (2.1)$$

Kako  $\hat{n}$  mora biti ceo broj, moramo ovu vrednost zaokružiti. Smer zaokruživanja ne utiče bitno na konačan rezultat s obzirom da je  $n$  veoma veliko. Međutim, inženjerski rezon je usvajanje najnepovoljnije vrednosti, koja se u ovom slučaju dobija zaokruživanjem naviše. Trajanje merenja je

$$t = \frac{\hat{n}}{v_b} = \frac{41231686042 \text{ bita}}{64 \text{ kbps}} \approx 7 \text{ dana } 11 \text{ h} \quad (2.2)$$

Veza između nivoa poverenja  $CL$ , bitske verovatnoće greške  $p$ , poslatog broja informacionih bita  $n$  i detektovanog broja pogrešnih bita  $N$  data je relacijom

$$n = -\frac{\ln(1-CL)}{p} + \frac{\ln\left(\sum_{k=0}^N \frac{(np)^k}{k!}\right)}{p} \quad (2.3)$$

Za  $N = 0$  drugi član u gornjoj jednakosti je 0, pa se dobija da je za date uslove merenja broj bita koje je bilo potrebno poslati u kanal

$$n_0 = -\frac{\ln(1-CL)}{p} = 4,61 \cdot 10^{10} \text{ bita} \quad (2.4)$$

## 2. Bit Error Rate Test

---

Kako je ovo veće od stvarnog broja poslatih bita, tačan odgovor je pod b): na osnovu datog merenja nije moguće sa nivoom poverenja od 99 % tvrditi da je stvarna verovatnoća greške sistema manja od  $10^{-10}$ .

- a) Da bi BERT pod navedenim uslovima prošao sa  $N = 1$  detektovanom greškom potrebno je kroz kanal poslati

$$n_1 = -\frac{\ln(1-CL)}{p} + \frac{\ln(1+n_1p)}{p} \quad (2.5)$$

Ovo je nelinearna jednačina i njeno rešenje može se dobiti numeričkim metodama ili aproksimativnim računom. Prema razmatranju iz prethodnog zadatka,  $n_1$  se može izračunati rekursivno na osnovu formula

$$n_1^{(0)} p = n_0 p + \ln(1+n_0 p) \quad (2.6)$$

$$n_1^{(i)} p = n_0 p + \ln(1+n_1^{(i-1)} p), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Tako se dobija da je

$$\begin{aligned} n_1^{(0)} p &= 6,33 \\ n_1^{(1)} p &= 6,60 \\ n_1^{(2)} p &= 6,64 \\ n_1^{(3)} p &= n_1^{(\infty)} p = 6,64 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Zbog redundanse protokola, stvaran broj bita koji će se poslati u kanal biće

$$\hat{n}_1 = n_1 + 20\% \cdot n_1 = 79726909679 \text{ bita} \quad (2.9)$$

Trajanje ovog merenja iznosi

$$t_1 = \frac{\hat{n}_1}{v_b} = 14 \text{ dana } 10 \text{ h } 2 \text{ min} \quad (2.9)$$

pa je merenje produženo za oko 7 dana.

- b) iz jednakosti

$$np = -\ln(1-CL) + \ln\left(\sum_{k=0}^N \frac{(np)^k}{k!}\right) \quad (2.10)$$

uvrštanjem da je  $N = 0$ , dobija se

$$CL = 1 - e^{-np} = 1 - e^{-2^{35} \cdot 10^{-10}} = 96,78\% \quad (2.10)$$

## 2. Bit Error Rate Test

---

Sa druge strane, za fiksno  $CL$  od 99 %, dobija se da je

$$p(\varepsilon) \leq p = \frac{-\ln(1-CL)}{n} = \frac{-\ln(1-99\%)}{2^{35}} = 1,34 \cdot 10^{-10} \quad (2.11)$$

c) Da BERT ne bi trajao duže od 10 min, potreban broj prenetih informacionih bita iznosi

$$n = \frac{t \cdot v_b}{1 + 20\%} = \frac{10 \text{ min} \cdot 64 \text{ kbps}}{1,2} = 3,2 \cdot 10^7 \text{ bita} \quad (2.12)$$

Za ovako mali broj prenetih informacionih bita, nivo poverenja BERT-a iznosi

$$CL = 1 - e^{-np} = 1 - e^{-3,2 \cdot 10^7 \cdot 10^{-10}} = 0,3\% \quad (2.13)$$

Ako se brzina signalizacije poveća 1000 puta, broj informacionih bita koji se mogu preneti kroz kanal za 10 min, se poveća 1000 puta, pa je traženi nivo poverenja za brzinu signalizacije od 64 Mbps

$$CL = 1 - e^{-np} = 1 - e^{-3,2 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-10}} = 96\% \quad (2.14)$$

### **Nekoliko praktičnih napomena vezanih za procenu ispravnosti BERT testa**

Kada je  $n \cdot p = 1$  tada je

$$CL_{\max} = CL(N=0) = 1 - e^{-np} = 1 - e^{-1} = 63,21\%$$

Za nivo poverenja testa od 95 %, kroz kanal je potrebno propustiti bar

$$n_0(95\%) = -\frac{\ln(1-CL)}{p} = -\frac{\ln 0,05}{p} = \frac{3,0}{p} \text{ bita}$$

za nivo poverenja testa od 99 %, kroz kanal je potrebno propustiti minimalno

$$n_0(99\%) = -\frac{\ln(1-CL)}{p} = -\frac{\ln 0,01}{p} = \frac{4,6}{p} \text{ bita}$$

dok je za nivo poverenja od 99,9 %, potrebno najmanje

$$n_0(99,9\%) = -\frac{\ln(1-CL)}{p} = -\frac{\ln 0,001}{p} = \frac{6,9}{p} \text{ bita}$$