Algoritmi iscrtavanja

1 DDA - Digital differential analyzer

DDA predstavlja algoritam koji se bazira na jednačini prave $y = kx + n$. Ako poznajemo početnu i krajnju tačku $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, moguće je odrediti koeficijente k i n. Izraz je dat u jednačini (1).

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, n = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + y_1 \tag{1}$$

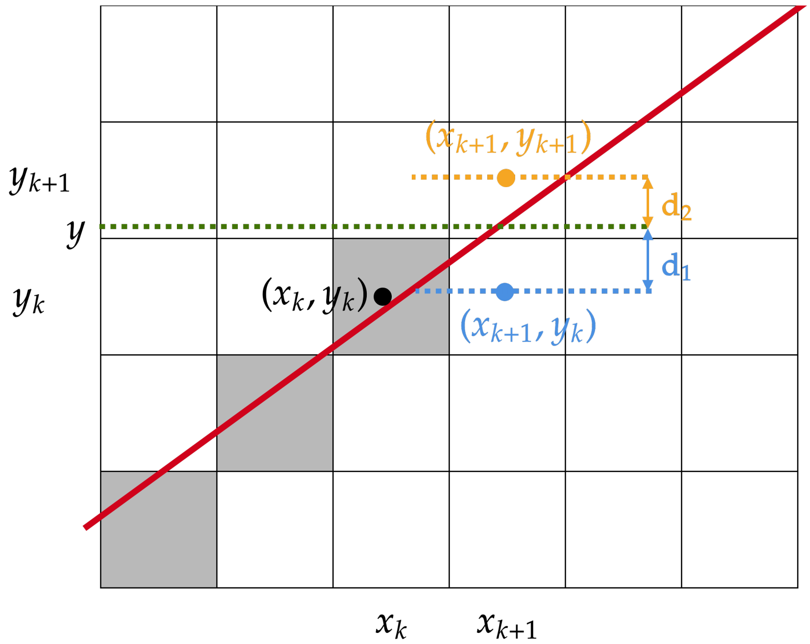
Algoritam kao početnu vrednost uzima y_1 i pošto se na displeju mogu iscrtavati pikseli (celobrojne vrednosti), vrednost pomeraja po x osi Δx je jedan (piksel). Sa svakom iteracijom vrednost y se uvećava za k sve dok y ne dostigne vrednost y_2, gde se iscrtavanje završava.

Važno je istaći da ovo važi samo za koeficijente pravca $|k| \leq 1$, jer se tada za promenu Δx od jednog piksela dobija promena y ne veća od jednog piksela. Ovako se dobija efekat iscrtavanja pune linije na ekranu. U slučaju kada je $|k| > 1$, ako bi se Δx menjalo za jedan piksel, y bi imalo promenu veću od jednog piksela čime bi se u prikazu dobijala isprekidana crta. Zbog toga se za $|k| > 1$ izračunava x, dok se y uvećava za jedan piksel.

2 Brezenhamov algoritam za iscrtavanje linije

2.1 Izvođenje

Neka je koordinata poslednje iscrtane tačke (x_k, y_k), gde k predstavlja trenutni piksel koji se želi iscrtati, i neka je koeficijent pravca $0 < k < 1$. Ako se želi nacrtati sledeća tačka na koordinati x_{k+1}, onda postoje dve moguće opcije za iscrtavanje tačke (x_{k+1}, y_k) ili (x_{k+1}, y_{k+1}). Na slici 1 je prikazan razmatrani slučaj.



Slika 1: Brezenhamov algoritam

Na slici 1 crvenom linijom je prikazana linearna funkcija koja se želi prikazati na ekranu. Neka su distance označene sa d_1 i d_2 predstavljaju rastojanje tačaka koje je moguće iscrtati ((x_{k+1}, y_k) ili (x_{k+1}, y_{k+1})) od stvarne vrednosti $y = k(x_{k+1} + n)$. Onda su izrazi za distance d_1 i d_2 dati sa:

$$\begin{aligned} d_1 = y - y_k = k(x_k + 1) + n - y_k \\ d_2 = y_{k+1} - y = y_k + 1 - k(x_k + 1) - n \end{aligned} \tag{2}$$

Na osnovu razlike distanci moguće je spram znaka odrediti koja tačka je bliža stvarnoj vrednosti. Tako na primeru sa slike 1, ako je $(d_1 - d_2) < 0$ onda je tačka (x_{k+1}, y_k) bliža tački (x_{k+1}, y), a u slučaju da je pozitivno onda je tačka (x_{k+1}, y_{k+1}) bliža stvarnoj vrednosti. Na osnovu izraza (2) moguće je odrediti razliku distanci kao:

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 = k(x_k + 1) + n - y_k - y_k - 1 + k(x_k + 1) + n \\ d_1 - d_2 = 2k(x_k + 1) + 2n - 1 - 2y_k \end{aligned} \tag{3}$$

Pošto koeficijent pravca k može biti neceo broj, a $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, tako se množenjem izraza (3) sa Δx dobija:

$$P_k = \Delta x(d_1 - d_2) = 2\Delta y x_k + 2\Delta y - 2y_k \Delta x + 2n\Delta x - \Delta x, \tag{4}$$

gde P_k predstavlja parametar odluke.

Parametar odluke i dalje zavisi samo od razlike distanci jer je Δx uvek pozitivno. Drugim rečima uvek se slika iscrtava sleva nadesno. Dakle, ako je P_k negativno onda je y bliže y_k, i obrnuto.

Takođe, kako bi se smanjio broj aritmetičkih operacija $(2n-1)\Delta x + 2\Delta y$ predstavlja konstantu c, pa se je moguće izvršiti proračun samo na početku. Tako se izraz za parametar odluke svodi na:

$$P_k = 2\Delta y x_k - 2\Delta x y_k + c. \tag{5}$$

Nakon određivanja P_k neophodno je odrediti parametar odluke u sledećoj tački kako bi se odredio piksel koji se dalje iscrtava P_{k+1} i dat je izrazom:

$$P_{k+1} = 2\Delta y x_{k+1} - 2\Delta x y_{k+1} + c. \tag{6}$$

Kako se ne bi stalno izračunavao P_{k+1} dovoljno je na početku samo odrediti njegovu vrednost, a zatim za svaku sledeću vrednost dodavati priraštaj, $P_{k+1} = P_k + \Delta P$. Tako se vrednost priraštaja parametra odluke može odrediti kao:

$$\Delta P = P_{k+1} - P_k = 2\Delta y(x_{k+1} - x_k) - 2\Delta x(y_{k+1} - y_k) \tag{7}$$

Vrednost $x_{k+1} - x_k$ je uvek jedan za $|k| < 1$, tj. uvek se proverava nova vrednost za sledeći piksel, pa se izraz (7) svodi na:

$$\Delta P = P_{k+1} - P_k = 2\Delta y - 2\Delta x(y_{k+1} - y_k) \tag{8}$$

Tako se parametar odluke može odrediti P_{k+1} kao:

$$P_{k+1} = P_k + 2\Delta y - 2\Delta x(y_{k+1} - y_k) \tag{9}$$

Tako se na osnovu već izračunate vrednosti P_k može odrediti i $y_{k+1} - y_k$, i to ako je $P_k \geq 0$ onda je $y_{k+1} - y_k = 1$, dok je za slučaj $P_k < 0$ razlika $y_{k+1} - y_k = 0$.

U slučaju da je $|k| > 1$, zamenjuju se x i y, a u slučaju da je negativno kreće se od poslednje, a ne od prve tačke. Primenjuje se sličan pristup.

2.2 Algoritam

1. Proslediti početnu $A(x_A, y_A)$ i krajnju tačku $B(x_B, y_B)$ linije koja se želi iscrtati na ekranu.
2. Odrediti $\Delta x = x_B - x_A$ i $\Delta y = y_B - y_A$.
3. Odrediti polaznu vrednost parametra odluke P_0 u tački A na osnovu izraza (4) kao:

$$P_0 = 2\Delta y x_A - 2\Delta x y_A + 2(n-1)\Delta x + 2\Delta y, \tag{10}$$

gde je $n = y_A - kx_A = y_A - \frac{\Delta y}{\Delta x} x_A$. Izraz (10) se sada svodi na:

$$\begin{aligned} P_0 = 2\Delta y x_A - 2\Delta x y_A + 2\Delta x y_A - 2\Delta y x_A - \Delta x + 2\Delta y \\ P_0 = 2\Delta y - \Delta x \end{aligned} \tag{11}$$

4. Nakon toga se u petlji za svako x_k proveri da li je $P_k < 0$ i ako jeste iscrta se piksel (x_{k+1}, y_k), pa se odredi naredni parametar odluke kao $P_{k+1} = P_k + 2\Delta y$. U slučaju da je parametar odluke $P_k \geq 0$ iscrtava se tačka (x_{k+1}, y_{k+1}) i izračunava se parametar odluke $P_{k+1} = P_k + 2\Delta y - 2\Delta x$.

3 Polinomna (direktna) metoda za iscrtavanje kružnice

Polinomna metoda koristi kanonski oblik jednačine kruga kako bi se iscrtala kružnica data izrazom:

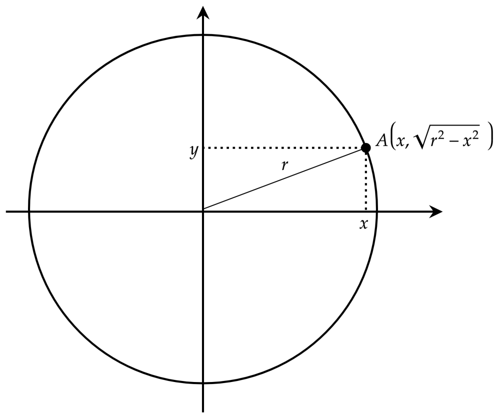
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{12}$$

gde x_0 i y_0 predstavljaju koordinate centra kružnice a r predstavlja poluprečnik.

Za vrednost svakog piksela x moguće je odrediti y kao:

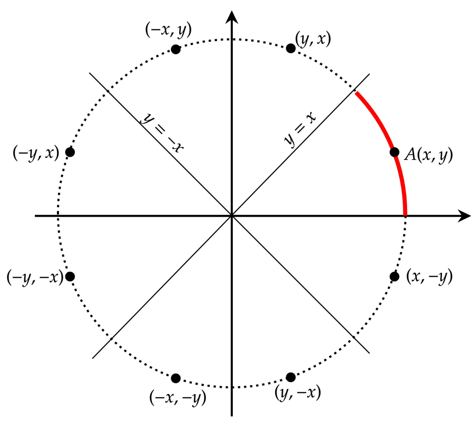
$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \tag{13}$$

Na slici 2 prikazana je polinomna metoda za iscrtavanje kružnice. Nakon izračunavanja vrednosti tačke se transliraju za x_0 i y_0 kako bi se pomerile u odnosu na koordinatni početak.



Slika 2: Polinomna metoda za iscrtavanje kružnice

Pošto je ova metoda neefikasna, zahteva izračunavanje korena kao i kvadrata svake od promenljivih, a takođe je neizbežno korišćenje floating point aritmetike moguće je vršiti kalkulacije samo za prvi oktant. Na osnovu prvog oktanta moguće je simetrijom izvršiti određivanje preostalih tačaka na kružnici, što je prikano na slici 3.



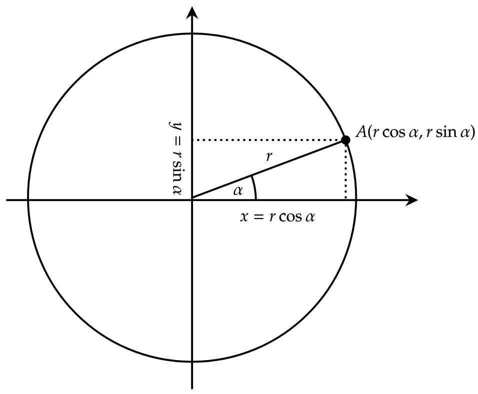
Slika 3: Simetrija kružnice

4 Metoda polarnih koordinata za iscrtavanje kružnice

Metoda polarnih koordinata (trigonometrijska metoda) koristi određivanje tačaka x i y korišćenjem trigonometrijskih funkcija kao:

$$\begin{aligned} x &= rcos\alpha \\ y &= rsin\alpha \end{aligned} \tag{14}$$

Ugao α se menja od 0 do $\frac{\pi}{4}$, gde se slično kao i u polinomnoj metodi preslikavaju simetrijom. Na slici 4 prikazana je metoda polarnih koordinata za iscrtavanje kružnice. Nakon izračunavanja vrednosti tačke se transliraju za x_0 i y_0 kako bi se pomerile u odnosu na koordinatni početak.



Slika 4: Metoda polarnih koordinata za iscrtavanje kružnice

Problem ove metode je u izračunavanju trigonometrijskih funkcija i neizbežnom radu u floating point aritmetici što može biti vremenski zahtevno u mikrokontrolerskim sistemima.

5 Midpoint algoritam za iscrtavanje kružnice

5.1 Izvođenje

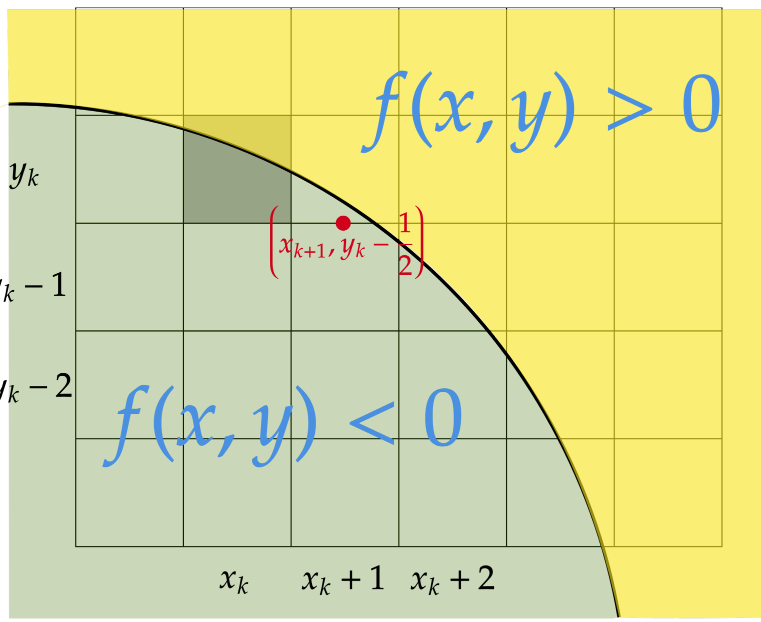
Ako je jednačina kružnice data izrazom $x^2 + y^2 = r^2$, onda je moguće definisati funkciju:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2, \tag{15}$$

na osnovu koje se može odrediti pripadnost tačke kružnici i to:

$$f(g, x) \begin{cases} < 0, & \text{tačka } (x, y) \text{ je unutar kružnice} \\ = 0, & \text{tačka } (x, y) \text{ se nalazi na kružnici} \\ > 0, & \text{tačka } (x, y) \text{ je van kružnice} \end{cases} \tag{16}$$

Na slici 5 je prikazan midpoint algoritam za iscrtavanje kružnice.



Slika 5: Midpoint metod za iscrtavanje kružnice

Neka je iscrtan piksel (x_k,y_k), onda se treba iscrtati ili (x_{k+1},y_k) ili (x_{k+1},$y_k - 1$). Parametar odluke na osnovu čega se odlučuje da koja će se tačka nacrtati zavisi od središta između tačaka (x_{k+1},y_k) i (x_{k+1},y_{k-1}), tj. tačke (x_{k+1},$y_k - \frac{1}{2}$). Ako se tačka (x_{k+1},$y_k - \frac{1}{2}$) nalazi unutar kružnice onda treba odabrati dalju tačku od centra (x_{k+1},y_k), dok u slučaju da se ona nalazi izvan kružnice bira se tačka (x_{k+1},y_{k-1}). Drugim rečima midpoint algoritam nastoji da u svakoj iteraciji tačku srednjeg rastojanja održava što je bliže moguće kružnici. Važno je istaći da je $x_{k+1} = x_k + 1$.

Tako se parametar odluke može definisati kao:

$$P_k = f(x_{k+1}, y_k - \frac{1}{2}) = (x_k + 1)^2 + (y_k - \frac{1}{2})^2 - r^2. \tag{17}$$

Ako je parametar odluke negativan onda je srednja tačka unutar kružnice pa se zbog toga uzima y_k kako bi se srednja tačka približila kružnici u sledećoj iteraciji, u suprotnom se uzima y_{k-1}.

U sledećem koraku formirani parametar odluke je dat izrazom:

$$P_{k+1} = f(x_{k+1} + 1, y_{k+1} - \frac{1}{2}) = (x_k + 2)^2 + (y_{k+1} - \frac{1}{2})^2 - r^2. \tag{18}$$

Priraštaj parametra odluke $\Delta P = P_{k+1} - P_k$ može se odrediti, korišćenjem izraza (17) i (18), kao:

$$\begin{gathered} \Delta P = (x_k^2 + 4x_k + 4 + y_{k+1}^2 - y_{k+1} + \tfrac{1}{4} - r^2) - (x_k^2 + 2x_k + 1 + y_k^2 - y_k + \tfrac{1}{4} - r^2) \\ \Delta P = 2x_k + 3 + y_{k+1}^2 - y_k^2 + y_k - y_{k+1} \end{gathered} \tag{19}$$

Tako se vrednost koeficijenta odluke u slučaju P_{k+1} može razdvojiti na dva slučaja. U slučaju kada je P_k negativan onda je $y_{k+1} = y_k$, dok je u slučaju da je P_k pozitivno $y_{k+1} = y_k - 1$. Pa se onda izraz za $P_{k+1} = P_k + \Delta P$ može zapisati kao

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \begin{cases} P_k + 2x_k + 3 + y_k^2 - y_k^2 + y_k - y_k, & \text{za } P_k < 0 \\ P_k + 2x_k + 3 + (y_k - 1)^2 - y_k^2 + y_k - (y_k - 1), & \text{za } P_k \geq 0 \end{cases} \\ P_{k+1} &= \begin{cases} P_k + 2x_k + 3, & \text{za } P_k < 0 \\ P_k + 2x_k - 2y_k + 5, & \text{za } P_k \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{20}$$

5.2 Algoritam

1. Proslediti radijus i centar kruga (x_c, y_c), započeti iscrtavanje od tačke $(0, r)$.

2. Odrediti inicjalnu vrednost koeficijenta odluke $P_0 = f(0, r)$ na osnovu jendačine (17) kao

$$\begin{gathered} P_0 = f(0, r) = (0 + 1)^2 + (r - \tfrac{1}{2})^2 - r^2 \\ P_0 = f(0, r) = 1 + r^2 - r + \tfrac{1}{4} - r^2 \\ P_0 = \tfrac{5}{4} - r \end{gathered} \tag{21}$$

3. Proveravati da li je P_k manje od nule, i odrediti tačku kružnice definisane kao (x_{k+1}, y_k) i odrediti parametar odluke za sledeću tačku $P_{k+1} = P_k + 2x_k + 3$. U slučaju da je P_k pozitivan odrediti tačku kružnice definisane kao: (x_{k+1}, y_{k+1}) i odrediti parametar odluke za sledeću tačku $P_{k+1} = P_k + 2x_k - 2y_k + 5$.

4. Primeniti simetriju na preostalih sedam oktanata.

5. Translirati svih osam tačaka kružnice u odnosu na prosleđeni centar kružnice $(x_n = x + x_c)$ i $(y_n = y + y_c)$.

6. Ponavljati ciklus dok se ne nacrta prvi oktant.