Vežbe iz Električnih merenja

http://www.kelm.ftn.uns.ac.rs

Greške merenja i statistička obrada podataka

1. Greške merenja

Osnovni zadatak merne tehnike je da odredi pravu vrednost merene veličine, imajući u vidu okolnosti pod kojima se vrši merenje. I pored primene savremenih tehnika merenja, merne opreme visokih performansi i uz svu moguću pažnju dolazi do određenih odstupanja između stvarne i izmerene vrednosti. Greške merenja nastaju zbog nesavršenosti merne opreme, postupka (procedure) merenja, objekta merenja i znanja i veštine osobe koja vrši merenje. Što je greška merenja manja, merenje je tačnije.

Zbog navedenog merenje nije potpuno, tj. rezultat merenja nema pravu vrednost, ako se pored izmerene vrednosti na neki način ne definišu i granice u kojima se nalazi stvarna vrednost u odnosu na izmerenu.

1.1. Grube greške

Grube greške nastaju nepažnjom osobe koja vrši merenje, izborom neodgovarajuće metode (postupka) merenja ili zbog neuočavanja uzroka greške. Primer je da se kod instrumenta sa više skala pročita vrednost na pogrešnoj skali. Uopšte uzev, grube greške merenja izbegavaju se većom pažnjom prilikom merenja. Najčešće rezultati sa grubom greškom značajno odstupaju od srednje vrednosti većeg broja merenja, pa ih je lako uočiti tokom analize i odstraniti iz skupa mernih podataka.

1.2. Sistematske greške

Sistematske greške nastaju zbog nesavršenosti merne opreme, procedure merenja ili mernog postupka, mernog objekta, kao i zbog uticaja okoline i ličnih uticaja osobe koja vrši merenje koji su obuhvatljivi. Ove greške imaju određenu vrednost i predznak, pa mogu da se uznu u obzir prilikom korekcije.

Postoje i sistematske greške čija vrednost nije poznata, pa nije moguća njihova korekcija. I ovakve sistematske greške imaju nepoznatu fiksnu (stalnu) vrednost i nepoznati (ali uvek isti) predznak.

Čest je slučaj da priključivanje merne opreme izaziva sistematsku grešku merenja. Primer je priključivanje voltmetra koji ima konačnu ulaznu otpornost zbog čega dolazi do promene napona u tačkama gde se on priključuje.

Zbog navedenog uvek moramo da imamo u vidu ograničenja merne opreme koju koristimo. Nikada ne treba posmatrati mernu opremu kao idealnu, već treba uvidom u dokumentaciju i određenim proverama odrediti karakteristike koje mogu da dovedu do greške u merenju.

1.3. Slučajne greške

Slučajne greške nastaju usled neobuhvatljivih promena koje nastaju u mernim instrumentima i mernom objektu (npr. efekti starenja komponenti) i usled neobuhvatljivih uticaja okoline i osobe koja vrši merenje. Ove greške su rezultat velikog broja faktora koji različito deluju na svako pojedinačno merenje. Zbog toga se menja i apsolutni iznos i predznak slučajne greške. Ove greške dovode do rasipanja rezultata i do nesigurnosti u određivanju stvarne vrednosti merenja.

Pojedinačni merni rezultati sa slučajnim greškama su podjednako značajni za merenje, ni jedan od njih nije u prednosti. Gaus (1795. godine) je pokazao da je u ovom slučaju prema metodi najmanjih kvadrata srednja vrednost (aritmetička sredina) pojedinačnih rezultata najverovatnija vrednost merene veličine.

2. Srednja vrednost (aritmetička sredina)

Ako je izvršeno n merenja čiji su pojedinačni rezultati x_1, x_2, ..., x_n, onda je aritmetička sredina $\overline{x}$ data sa:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Na ovaj način računa se srednja vrednost (aritmetička sredina) samo za mali broj pojedinačnih rezultata. U ostalim slučajevima koristi se nešto izmenjen algoritam, gde se pojedinačni rezultati umanje za neku prikladnu veličinu x_0, tako da je:

$$\overline{x} = x_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)$$

Što je neki postupak merenja precizniji, to je manja razlika između pojedinačnih rezultata merenja. Za računsku ocenu preciznosti nekog mernog postupka procenjuje se srednja kvadratna greška pojedinačnog merenja.

3. Srednja kvadratna greška (standardna devijacija)

Srednja kvadratna geška pojedinačnog merenja ili standardna devijacija definisana je kao:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Prema ovom izrazu se srednja kvadratna greška određuje na osnovu razlika $(x_i - \bar{x})$ između pojedinačnih rezultata i srednje vrednosti (aritmetičke sredine), umesto na osnovu razlike pojedinačnih vrednosti i stvarne (prave) vrednosti, kako bi to bilo pravilno na osnovu definicije iz teorije grešaka. Razlog za ovakvu korekciju je očigledan: ne znamo kolika je stvarna (prava) vrednost.

Pri dovoljno velikom broju merenja n srednje kvadratno odstupanje definisano na ovakav način se neznatno razlikuje od veličine σ koja je u statističkoj teoriji poznata kao standardna devijacija osnovnog skupa.

Uz više podataka (n - 1 $\approx$ n) procena srednje kvadratne greške lakša je pomoću izraza:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 - (\bar{x} - x_0)^2$$

4. Grupisanje vrednosti; računanje sa grupisanim vrednostima

Ako imamo mnogo pojedinačnih rezultata, često grupišemo približne rezultate merenja. Tako dobijamo pregledniju sliku rezultata bez neznatnih varijacija. Ujedno se pojednostavljuje računski postupak određivanja aritmetičke sredine i standardne devijacije.

Grupisanje se vrši tako što se područje u kome se rasipaju rezultati merenja podeli na više jednakih delova. Podela ne sme da bude pregruba, jer se tako smanjuje preglednost i dovodi do pogrešnih rezultata. Ako je podela prefina, otežava se računanje, a ne dobija se mnogo tačniji rezultat.

Obično se bira neparan broj grupa. Granice grupa definišu se tako da ne postoji dvoumljenje prilikom sortiranja rezultata u grupe.

Na osnovu broja rezultata merenja u pojedinim grupama može da se nacrta histogram, kod koga su na jednoj osi nanete grupe, a na drugoj broj elemenata u određenoj grupi, čime može da se stekne vizualni utisak o raspodeli rezultata.

5. Gausova (normalna) raspodela

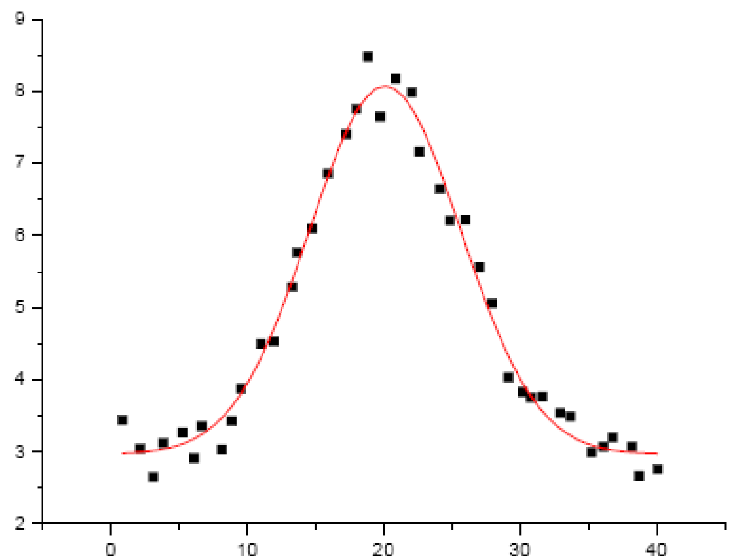
Ako greške nastaju delovanjem velikog broja slučajnih i međusobno nezavisnih uzroka, od kojih svaki izaziva različite, ali veoma male greške, merni rezultati će se rasipati prema normalnoj ili Gausovoj raspodeli. Iako su uslovi za normalnu raspodelu veoma strogi po definiciji, praktično su dovoljno ispunjeni u većini slučajeva na koje nailazimo u mernoj tehnici.

Normalna raspodela je definisana funkcijom verovatnoće:

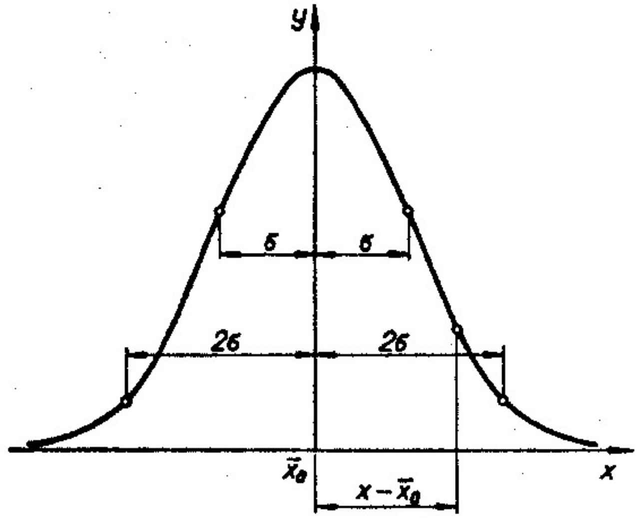
$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}_0}{\sigma}\right)^2}$$

gde je $\bar{x}_0$ aritmetička sredina beskonačnog skupa, a σ standardna devijacija beskonačnog skupa.

Za jedan niz podataka ušestanost vrednosti srednjeg kvadratnog odstupanja predstavljen je na sledećem grafiku. Interpolaciona kriva je data Gausovom funkcijom verovatnoće. Vidi se da učestanost srednjeg kvadratnog odstupanja može da se aproksimira gausovom raspodelom. Za veći broj podataka pojedinačni rezultati će se nagomilavati u blizini gausove krive:

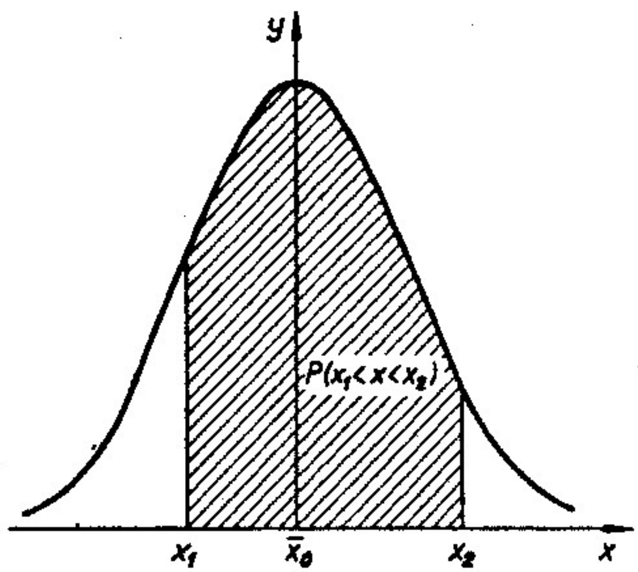


Kriva normalne raspodele je zvonolikog oblika, jednoznačno određena standardnom devijacijom i srednjom vrednošću (aritmetičkom sredinom). Teme krive je na osi $x = x_0$ i asimptotski se približava osi x.



Verovatnoća $P_{(x_1<x<x_2)}$ da će promenljiva x imati neku vrednost između x_1 i x_2 dobija se integraljenjem funkcije verovatnoće u granicama od x_1 do x_2 :

$$P_{(x_1<x<x_2)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}_0}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x$$



Ovaj integral predstavlja površinu ispod krive verovatnoće nad intervalom od x_1 do x_2. Rešavanje ovog integrala pripada kursu matematičke analize. Treba zapamtiti da se unutar granica $\pm\sigma$ nalazi 68.3% rezultata merenja, unutar granica $\pm 2\sigma$ nalazi se 95.5% rezultata, a unutar granica $\pm 3\sigma$ nalazi se 99.73%, tj. van granica $\pm 3\sigma$ nalazi se samo 0.27% rezultata merenja.