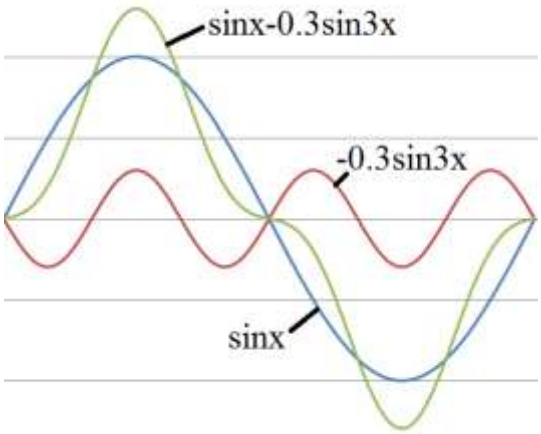
1. Napon talasnog oblika $u(t) = U_m(\sin\omega t - 0.3\sin 3\omega t)$ je doveden na dva paralelno vezana voltmetra. Prvi voltmetar je instument sa mekim gvožđem, a drugi je instrument sa kretnim kalemom i jednostranim ispravljačem, kalibrisan da pokazuje efektivnu vrednost prostoperiodičnog napona. Ako je pokazivanje drugog instrumenta 140 V, koliko pokazuje prvi instrument.

Rešenje:
Prvi voltmetar, instrument sa mekim gvožđem, meri efektivnu vrednost napona po definiciji. Njegovo pokazivanje se traži.
Drugi instrument meri srednju vrednost jednostrano ispravljenog napona i množi faktorom oblika za prostoperiodični talasni oblik i jednostrani ispravljač (2.22). Analizom talasnog oblika se pokazuje da je u prvoj polovini periode *T* napon pozitivan (pa zbog toga prolazi kroz jednostrani ispravljač), a u drugoj polovini periode napon je negativan, pa je tada na izlazu ispravljača odziv nula.

$$U_2 = 2.22 \cdot \frac{1}{T} \cdot \left[\int_0^{T/2} u(t) \cdot dt + \int_{T/2}^{T} 0 \cdot dt \right] = 140 \text{ V}$$



$$U_2 = \frac{2.22 \cdot U_m}{T} \cdot \int_0^{T/2} (\sin\omega t - 0.3\sin 3\omega t) \cdot dt$$

Podsetnik: $\int \sin\omega t \cdot dt = -\frac{1}{\omega} \cdot \cos\omega t$

$$U_2 = \frac{2.22 \cdot U_m}{T} \cdot \left[-\frac{\cos\omega t}{\omega} + 0.3 \cdot \frac{\cos 3\omega t}{3\omega} \right] \Bigg|_0^{T/2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$U_2 = \frac{2.22 \cdot U_m}{T} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \left[-\cos\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} + \cos 0 + 0.1 \cdot \cos\frac{3 \cdot 2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} - 0.1 \cdot \cos 0 \right]$$

$$U_2 = \frac{2.22 \cdot U_m}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot [1 + 1 - 0.1 - 0.1]$$

$$U_2 = \frac{2.22 \cdot U_m}{2\pi} \cdot 1.8 = 140 \text{ V} \Rightarrow U_m = 220 \text{ V}$$

Efektivnu vrednost možemo odrediti po definiciji.

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) \cdot dt}$$

Možemo iskoristiti i formulu za efektivnu vrednost složenoperiodičnog signala: efektivna vrednost je jednaka kvadratnom korenu iz polovine sume kvadrata svih amplituda. Napon u ovom primeru ima prvi harmonik amplitude U_m i treći harmonik ampitude $0.3U_m$.

$$U_1 = U_{ef} = \sqrt{\frac{U_m^2 + (0.3U_m)^2}{2}} = 0.738 \cdot U_m$$

$$U_1 = 162 \text{ V}$$

Napomena:
Da je u pitanju prostoperiodični napon, oba instrumenta bi pokazivali isto - efektivnu vrednost. U ovom primeru, napon je složenoperiodičan: pored osnovnog, sadrži i treći

harmonik (prostoperiodična komponenta na trostruko većoj učestanosti), pa ugrađeni faktor oblika više ne važi. Zato se javlja razlika u pokazivanjima ova dva voltmetra. Efektivnu vrednost ispravno određuje instrument sa mekim gvožđem. Drugi voltmetar dobro pokazuje samo u prostoperiodičnom režimu! U svim drugim situacijama nastaje sistematska greška usled talasnog oblika.

2. Napon $u(t) = A_0 + A_1 \cdot \sin \omega t$, $A_0 = 3\,\mathrm{V}$, $A_1 = 5\,\mathrm{V}$, je doveden na instrument sa kretnim kalemom i jednostranim ispravljačem, kalibrisanim da pokazuje efektivnu vrednost prostoperiodičnog talasnog oblika. Koliko je pokazivanje instrumenta?

Rešenje:
Opisani instrument "obavlja" posao iz tri koraka. Prvi korak je vezan za jednostrani ispravljač. On propušta delove napona koji su pozitivni, a ne propušta negativne delove napona. Drugi korak podrazumeva nalaženje srednje vrednosti napona nakon ispravljača. U trećem koraku se obavlja množenje faktorom oblika za sinusni napon i jednostrani ispravljač, a to je vrednost 2.22.

$$U = 2.22 \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u'(t) \cdot dt$$

Prvo je potrebno naći interval u kojem je napon pozitivan da bi se mogle odrediti granice integrala. Trenutak T_1 ćemo odrediti izjednačavanjem napona sa nulom.

$$u(T_1) = 0 \Rightarrow A_0 + A_1 \cdot \sin \omega T_1 = 0 \Rightarrow \omega T_1 = \arcsin\left(-\frac{A_0}{A_1}\right)$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega} \cdot \arcsin\left(-\frac{A_0}{A_1}\right)$$

Sa slike se vidi, zbog simetrije, da je $T_2 = \frac{T}{2} + |T_1|$. Konačno imamo:

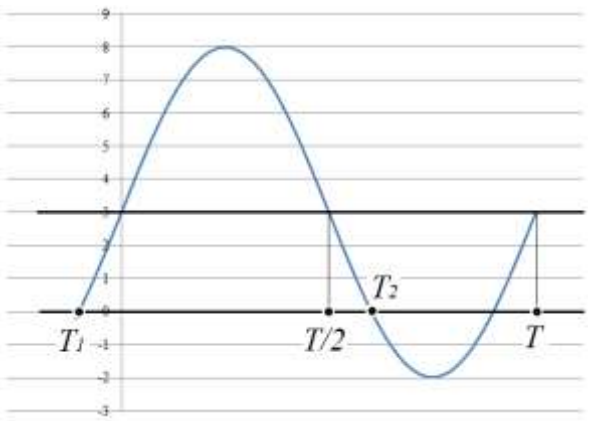
$$T_1 = -0.1024 \cdot T \qquad T_2 = 0.6024 \cdot T$$

Pošto su sada poznate granice intervala u kojem je napon pozitivan, može se napisati izraz za pokazivanje voltmetra sa kretnim kalemom i jednostranim ispravljačem, kalibrisanim da pokazuje efektivnu vrednost prostoperiodičnog talasnog oblika.

$$U = \frac{2.22}{T} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \left[A_0 + A_1 \cdot \sin \omega t\right] \cdot dt$$

$$U = \frac{2.22}{T} \cdot \left[A_0 \cdot t - \frac{A_1}{\omega} \cdot \cos \omega t\right]\Bigg|_{T_1}^{T_2}$$

$$U = \frac{2.22}{T} \cdot \left[\begin{array}{l} A_0 \cdot (T_2 - T_1) - \frac{T \cdot A_1}{2\pi} \cdot \cos \omega T_2 \\ + \frac{T \cdot A_1}{2\pi} \cdot \cos \omega T_1 \end{array}\right]$$



$$U = 7.52\ \mathrm{V}$$

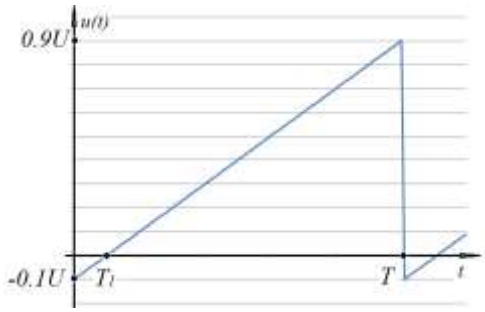
Napomena:

Ovde nastaje sistematska greška merenja jer je umesto prostoperiodičnog (sinusnog) napona, na instrument doveden napon koji se sastoji od zbira naizmenične sinusne komponente i jednosmerne komponente.
Obratite pažnju da je neophodno koristiti arc funkcije tako da daju ugao u radijanima, pošto je kružna učestanost u rad/s, a ne u stepenima/sekundi!

3. Periodičan napon dovoljno velike frekvencije, talasnog oblika datog funkcijom $u(t) = \frac{t}{T} \cdot U + U_0$, $0 \le t \le T$, $U > 0$, doveden je na voltmetar sa kretnim kalemom i jednostranim ispravljačem, kalibrisanim da meri efektivnu vrednost prostoperiodičnog napona. Koliko iznosi relativna sistematska greška merenja ako je odnos $U_0 = -0.1 \cdot U$?

Rešenje:
Prvo je potrebno nacrtati izgled napona, da bi se odredio oblik napona koji se dobija nakon jednostranog ispravljača. Instrument sa kretnim kalemom će skretati srazmerno srednjoj vrednosti ispravljenog napona.

$$u(0) = U_0 = -0.1 \cdot U$$
$$u(T) = U - 0.1 \cdot U = 0.9 \cdot U$$
$$u(T_1) = 0 = \frac{T_1}{T} \cdot U - 0.1 \cdot U$$
$$\frac{T_1}{T} = 0.1 \Rightarrow T_1 = 0.1 \cdot T$$



Jednostrani ispravljač će propustiti bez promena sve pozitivne delove napona, a negativne vrednosti napona će biti zamenjene nulom. Na izlazu ispravljača se dobija napon:

$$u'(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t < T_1 \\ \frac{t}{T} \cdot U + U_0 & , T_1 < t < T \end{cases}.$$

Instrument sa kretnim kalemom i jednostranim ispravlječem će pokazati vrednost koja predstvlja proizvod faktora oblika i srednje vrednosti jednostrano ispravljenog napona. Pokazivanje instrumenta će biti merena vrednost. Tačna vrednost je efektivna vrednost napona *u(t)*.

$$U_{mer} = 2.22 \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u'(t) \cdot dt = \frac{2.22}{T} \cdot \int_{0.1T}^{T} \left(\frac{t \cdot U}{T} - 0.1 \cdot U \right) \cdot dt = \frac{2.22}{T} \cdot P_\Delta$$

Vrednost integrala predstavlja površinu koju definiše podintegralna funkcija prema horizontalnoj (vremenskoj) osi. U našem slučaju je reč o trouglu, pa se vrednost integrala može zameniti površinom trougla čija je visina 0.9*U*, a baza 0.9*T*.

$$U_{mer} = \frac{2.22}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.9U \cdot (T - T_1) = \frac{2.22}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.9U \cdot 0.9T \qquad U_{mer} = 0.8991 \cdot U$$

Efektivna vrednost se računa u odnosu na originalni napon *u(t)*! Instrument sa mekim gvožđem meri efektivnu vrednost po definiciji i nisu mu, kao pomoć, potrebni ni ispravljači ni faktor oblika.

$$U_{tač} = U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T u(t)^2\cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T U^2\cdot\left(\frac{t}{T}-0.1\right)^2\cdot dt} =$$

$$= U\cdot\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\left(\frac{t^2}{T^2}-0.2\cdot\frac{t}{T}+0.01\right)\cdot dt} = U\cdot\sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{t^3}{3T^2}-\frac{0.2}{2}\cdot\frac{t^2}{T}+0.01\cdot t\right]\Bigg|_0^T} =$$

$$= U\cdot\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{T}{3}-0.1\cdot T+0.01\cdot T\right]} = U\cdot\sqrt{\frac{1}{3}-0.1+0.01} = U\cdot 0.493$$

Relativna vrednost greške je definisana izrazom:

$$\Gamma_{\%} = \left(\frac{U_{mer}}{U_{tač}}-1\right)\cdot 100 \Rightarrow \Gamma_{\%} = 82.4\%$$

Napomena:

Dobijena je vrlo velika greška! Ova greška potiče od "neočekivanog" talasnog oblika, a posebno od jednosmerne komponente koja postoji u signalu. Napon ima oblik testere koja je izdignuta za iznos jednosmerne komponente, pa joj nisu (po apsolutnoj vrednosti) iste maksimalna pozitivna i maksimalna negativna vrednost.

4. Reaktivna snaga monofaznog potrošača određuje se na osnovu merenja struje, napona i aktivne snage. Kolike su procentualne sigurne granice greške merenja reaktivne snage ako je faktor snage jednak 0.95, a sigurne granice greške merenja struje, napona i snage iznose ±0.5 %?

Rešenje:

Reaktivna snaga je ovde indirektno određivana veličina. Ne očitava se direktno sa skale instrumenta za merenje reaktivne snage (VAr-metar), nego se računa na osnovu drugih izmerenih i saopštenih veličina. Ovde se traži pocena najveće moguće greške koja se može sadržati u rezultatu za reaktivnu snagu, a koja potiče od grešaka merenih veličina: napona, struje i aktivne snage.

$$Q = \sqrt{U^2\cdot I^2 - P^2}\,; \qquad \cos\varphi = 0.95; \qquad \left|\frac{\Delta I}{I}\right| = \left|\frac{\Delta U}{U}\right| = \left|\frac{\Delta P}{P}\right| = 0.5\%$$

Ovde se polazi od izraza za totalni izvod zavisnosti indirektno merene veličine od merenih vrednosti, uz izmenu da se sabiranje pojedinih doprinosa vrši po apsolutnoj vrednosti!

$$|\Delta Q| \le \left|\frac{\partial Q}{\partial I}\cdot\Delta I\right| + \left|\frac{\partial Q}{\partial U}\cdot\Delta U\right| + \left|\frac{\partial Q}{\partial P}\cdot\Delta P\right|$$

Ovo bi bila formula po kojoj bismo došli do maksimalne apsolutne greške - greške iskazane u jedinicama za reaktivnu snagu (VAr). U zadatku se traže procentualne granice greške, pa je prethodni izraz potrebno podeliti vrednošću reaktivne snage Q.

$$\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right| \le \frac{1}{Q}\cdot\left[\left|\frac{\partial Q}{\partial I}\cdot\Delta I\right| + \left|\frac{\partial Q}{\partial U}\cdot\Delta U\right| + \left|\frac{\partial Q}{\partial P}\cdot\Delta P\right|\right]$$

$$\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right| \le \frac{1}{\sqrt{U^2 \cdot I^2 - P^2}} \cdot \left[\left|\frac{U^2 \cdot 2I \cdot \Delta I}{2 \cdot \sqrt{U^2 \cdot I^2 - P^2}}\right| + \left|\frac{I^2 \cdot 2U \cdot \Delta U}{2 \cdot \sqrt{U^2 \cdot I^2 - P^2}}\right| + \left|\frac{2P \cdot \Delta P}{2\sqrt{U^2 \cdot I^2 - P^2}}\right|\right]$$

$$\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right| \le \frac{1}{U^2 \cdot I^2 - P^2} \cdot \left[\left|U^2 \cdot I \cdot \Delta I\right| + \left|I^2 \cdot U \cdot \Delta U\right| + \left|P \cdot \Delta P\right|\right]$$

Ovaj izraz ćemo napisati u obliku koji sadrži relativne greške merenih veličina umesto apsolutnih grešaka.

$$\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right| \le \frac{1}{U^2 \cdot I^2 - P^2} \cdot \left[\left|U^2 \cdot I^2 \cdot \frac{\Delta I}{I}\right| + \left|U^2 \cdot I^2 \cdot \frac{\Delta U}{U}\right| + \left|P^2 \cdot \frac{\Delta P}{P}\right|\right]$$

$$\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right| \le \frac{U^2 \cdot I^2}{U^2 \cdot I^2 - P^2} \cdot \left[\left|\frac{\Delta I}{I}\right| + \left|\frac{\Delta U}{U}\right|\right] + \frac{P^2}{U^2 \cdot I^2 - P^2} \cdot \left|\frac{\Delta P}{P}\right|$$

Imajući u vidu definiciju faktora snage, možemo izvršiti transformaciju izraza.

$\cos\varphi = P/(UI)$

$$\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right| \le \frac{1}{1-\cos^2\varphi} \cdot \left[\left|\frac{\Delta I}{I}\right| + \left|\frac{\Delta U}{U}\right|\right] + \frac{1}{\left(\frac{U \cdot I}{P}\right)^2 - 1} \cdot \left|\frac{\Delta P}{P}\right|$$

$$\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right| \le \frac{1}{1-\cos^2\varphi} \cdot \left[\left|\frac{\Delta I}{I}\right| + \left|\frac{\Delta U}{U}\right|\right] + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1} \cdot \left|\frac{\Delta P}{P}\right|$$

$$\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right| \le 14.9\%$$

Napomena:
Iako su merene veličine određene sa dobrom tačnošću, odnosno sa greškom manjom od 0.5 %, procentualne granice greške za reaktivnu snagu se dobijaju višestruko veće - 14.9 %! Zašto se ovo dešava? Problem je što se pri određivanju reaktivne snage vrši oduzimanje bliskih vrednosti. Za faktor snage blizak jedinici, imamo situaciju kada su prividna snaga (UI) i aktivna snaga (P) približno jednake. Oduzimanjem približno jednakih veličina koje u sebi sadrže grešku, može se dobiti rezultat koji je reda veličine samih grešaka, pa relativna greška takvog rezultata može biti vrlo velika!

5. Fazni ugao monofaznog potrošača određuje se na osnovu merenja struje, napona i aktivne snage. Kolike su apsolutno iskazane sigurne granice greške merenja faznog ugla, ako je faktor snage jednak 0.95, a sigurne granice greške merenja ampermetra, voltmetra i vatmetra iznose ±0.5 %.

Rešenje:

$$\varphi = \arccos\frac{P}{U \cdot I}, \quad \cos\varphi = 0.95, \quad \left|\frac{\Delta I}{I}\right| = \left|\frac{\Delta U}{U}\right| = \left|\frac{\Delta P}{P}\right| = 0.5\%$$

Podsetnik: $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$|\Delta\varphi| \le \left|\frac{\partial\varphi}{\partial P}\cdot\Delta P\right| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial U}\cdot\Delta U\right| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial I}\cdot\Delta I\right|$$

$$|\Delta\varphi| \le \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{P}{U\cdot I}\right)^2}}\cdot\left[\left|\frac{\Delta P}{U\cdot I}\right| + \left|\frac{-P}{U^2\cdot I}\cdot\Delta U\right| + \left|\frac{-P}{U\cdot I^2}\cdot\Delta I\right|\right]$$

$$|\Delta\varphi| \le \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\cdot\left[\left|\frac{\cos\varphi}{U\cdot I\cdot\cos\varphi}\cdot\Delta P\right| + \left|\frac{P}{U\cdot I}\cdot\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{P}{U\cdot I}\cdot\frac{\Delta I}{I}\right|\right]$$

$$|\Delta\varphi| \le \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\cdot\left[\left|\cos\varphi\cdot\frac{\Delta P}{P}\right| + \left|\cos\varphi\cdot\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\cos\varphi\cdot\frac{\Delta I}{I}\right|\right]$$

$$|\Delta\varphi| \le \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\cdot\left[\left|\frac{\Delta P}{P}\right| + \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta I}{I}\right|\right]$$

$$|\Delta\varphi| \le 0.0456\ \text{rad} \approx 46\ \text{mrad}$$

Napomena:
Zadatak je moguće rešiti na lakši način, čak i ako ne znamo šta je izvod arcos funkcije. Mogu se prvo naći sigurne granice greške za faktor snage, pa onda reći kolike su sigurne granice greške za fazni stav.

$$PF = \cos\varphi = \frac{P}{UI}$$

$$\left|\frac{\Delta PF}{PF}\right| \le \left|\frac{\Delta P}{P}\right| + \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta I}{I}\right|$$

$$|\Delta PF| = |\Delta(\cos\varphi)| \le PF\cdot\left\{\left|\frac{\Delta P}{P}\right| + \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta I}{I}\right|\right\}$$

$$\Delta(\cos\varphi) = -\sin(\varphi)\cdot\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}\Delta(\cos\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\Delta(\cos\varphi)$$

$$|\Delta\varphi| = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\cos\varphi\cdot\left\{\left|\frac{\Delta P}{P}\right| + \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta I}{I}\right|\right\}$$

6. Otpornost se meri U/I metodom, naponskom vezom. Upotrebljeni su:
Voltmetar, opsega 6 V, klase tačnosti 1 i unutrašnje otpornosti (6 000 ± 12) Ω,
Ampermetar, opsega 12 mA i klase tačnosti 1.
Očitano je 2 V i 10 mA. Odrediti sigurne granice greške rezultata merenja.

Rešenje:
V-metar: $U_{\max} = 6\ \text{V}$, $kl_V = 1$, $R_v = (6000 \pm 12)\,\Omega$
A-metar: $I_{\max} = 12\ \text{mA}$, $kl_A = 1$
$I = 10\ \text{mA}$, $U = 2\ \text{V}$
Količnik napona i struje, neće dati otpornost koju želimo, nego će predstavljati otpornost paralelne veze unutrašnje otpornosti V-metra i merenog otpora.

$$R_m = \frac{U}{I} = R_t \| R_V = \frac{R_t \cdot R_V}{R_t + R_V} \Rightarrow R_t = \frac{R_m}{1 - \frac{R_m}{R_V}}$$

$$R_t = \frac{\frac{U}{I}}{1 - \frac{U}{I \cdot R_V}} \Rightarrow R_t = \frac{R_V \cdot U}{R_V \cdot I - U}$$

U izrazu za R_t imamo otklonjenu sistematsku grešku koja bi nastala ukoliko bismo zanemarili konačnu unutrašnju otpornost V-metra. Otklanjanjem sistematske greške merenja, u rezultatu ostaju da postoje slučajne greške, čije konkretne vrednosti ne znamo. Znajući granice tih grešaka, možemo izvršiti procenu najveće moguće greške, odnosno možemo odrediti sigurne granice greške. Sada treba uraditi totalni izvod ovog izraza po svim veličinama koje u sebi sadrže grešku. Ovde su to: napon i struja (čija je maksimalna greška data klasom tačnosti korišćenih instrumenata) i greška poznavanja unutrašnje otpornosti V-metra.

$$|\Delta R_t| \le \left|\frac{\partial R_t}{\partial U} \cdot \Delta U\right| + \left|\frac{\partial R_t}{\partial I} \cdot \Delta I\right| + \left|\frac{\partial R_t}{\partial R_V} \cdot \Delta R_V\right|$$

$$|\Delta R_t| \le \left|\frac{R_V \cdot (R_V \cdot I - U) + R_V \cdot U}{(R_V \cdot I - U)^2} \cdot \Delta U\right| + \left|\frac{-R_V \cdot U \cdot R_V}{(R_V \cdot I - U)^2} \cdot \Delta I\right| + \left|\frac{U \cdot (R_V \cdot I - U) - R_V \cdot U \cdot I}{(R_V \cdot I - U)^2} \cdot \Delta R_V\right|$$

$$|\Delta R_t| \le \left|\frac{R_V{}^2 \cdot I}{(R_V \cdot I - U)^2} \cdot \Delta U\right| + \left|\frac{-R_V{}^2 \cdot U}{(R_V \cdot I - U)^2} \cdot \Delta I\right| + \left|\frac{-U^2}{(R_V \cdot I - U)^2} \cdot \Delta R_V\right|$$

$$kl_V = \frac{\Delta U}{U_{\max}} \cdot 100 \Rightarrow \Delta U = \frac{kl_V \cdot U_{\max}}{100} = 0.06 \text{ V}$$

$$kl_A = \frac{\Delta I}{I_{\max}} \cdot 100 \Rightarrow \Delta I = \frac{kl_A \cdot I_{\max}}{100} = 0.12 \text{ mA}$$

$$\Delta R_V = 12\ \Omega$$

$$|\Delta R_t| \le 6.4209\ \Omega + 2.5684\ \Omega + 0.0143\ \Omega$$

$$|\Delta R_t| \le 9.0036\ \Omega$$

Napomena:
Vidimo da najveći doprinos u ukupnoj grešci imamo zbog greške V-metra (6.4209 Ω), zatim od greške A-metra (2.5684 Ω), a najmanji doprinos potiče od nepoznavanja unutrašnje otpornosti V-metra (0.0143 Ω).

7. Talasni oblik napona na izlazu iz izvora prikazan je na slici. Amplituda *U* iznosi 1 V. Koliki jednosmerni napon (ofset) treba dodati prikazanom naponu da bi srednja vrednost tako dobijenog napona bila jednaka nuli?

Rešenje:
Prvo je potrebno definisati zavisnost *u(t)*.

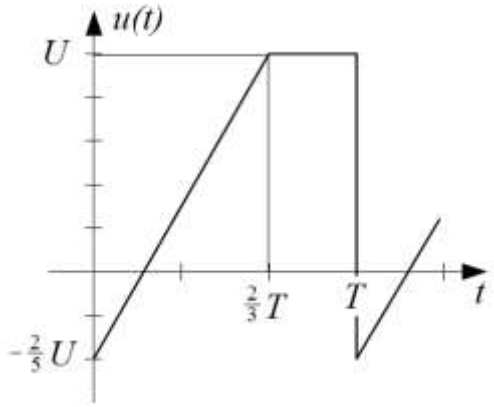
$U = 1\,\mathrm{V}$

$u = k \cdot t + n$

$-\frac{2}{5} \cdot U_m = -\frac{2}{5} \cdot 1 = k \cdot 0 + n \Rightarrow n = -\frac{2}{5}$

$U_m = 1 = k \cdot \frac{2 \cdot T}{3} + n \Rightarrow k = \frac{21}{10 \cdot T}$

$$u(t) = \begin{cases} \frac{21}{10T} \cdot t - \frac{2}{5} & , 0 < t < \frac{2T}{3} \\ 1 & , \frac{2T}{3} < t < T \end{cases}$$



Traži se vrednost ofset napona (jednosmerne komponente), koju treba dodati naponu *u(t)* da bi tako dobijeni napon imao srednju vrednost 0.

$$\frac{1}{T}\int_0^T [u(t) + U_x]\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T U_x\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, dt + U_x = 0$$

Iz ovog sledi da je traženi ofset napon jednak negativnoj vrednosti srednje vrednosti napona *u(t)*.

$$U_x = -\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, dt$$

$$U_x = -\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot dt = -\frac{1}{T} \cdot \left\{ \int_0^{2T/3} \left(\frac{21t}{10T} - \frac{2}{5} \right) \cdot dt + \int_{2T/3}^{T} dt \right\}$$

$$U_x = -\frac{1}{T} \cdot \left\{ \left[\frac{21}{10T} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{2}{5} \cdot t \right] \Bigg|_0^{2T/3} + t \,\Big|_{2T/3}^{T} \right\}$$

$U_x = -0.53\,\mathrm{V}$

8. Napon $u(t)$ = (3 - 3 sin(314 t)) V meri se voltmetrom sa mekim gvožđem. Koliko će biti pokazivanje voltmetra?

Rešenje:

Instrument sa mekim (pokretnim) gvožđem meri efektivnu vrednost.

$u(t) = (3 - 3 \cdot \sin 314t)$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t) \cdot dt}$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left[9 - 18 \cdot \sin \omega t + 9 \cdot \sin^2 \omega t \right] \cdot dt}$$

Uvešćemo smenu za kvadrat sinusne funkcije.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left[9 \cdot \int_0^T dt - \int_0^T 18 \cdot \sin \omega t \cdot dt + \frac{9}{2} \cdot \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) \cdot dt \right]}$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[9\cdot\int_0^T dt - \int_0^T 18\cdot\sin\omega t\cdot dt + \frac{9}{2}\cdot\int_0^T dt + \frac{9}{2}\cdot\int_0^T(-\cos 2\omega t)\cdot dt\right]}$$

Rešenje drugog i četvrtog integrala će biti nula, jer se radi o integralu prostoperiodične funkcije nad jednom, odnosno, nad dve cele periode. Ostaju da se reše prvi i treći integral.

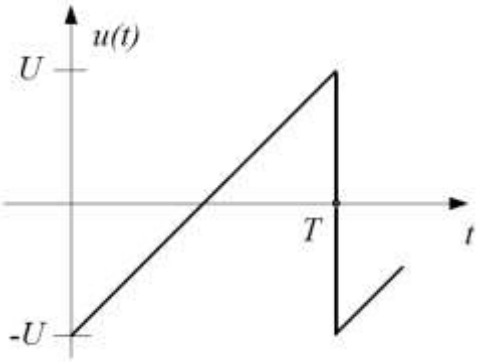
$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[9t\Big|_0^T + \frac{9}{2}t\Big|_0^T\right]} = 3.67\text{ V}$$

9. Napon $u(t)$, prikazan na slici, amplitude 1 V, dovoljno velike frekvencije, doveden je na voltmetar sa kretnim kalemom i jednostranim ispravljačem, kalibrisanim da meri efektivnu vrednost prostoperiodičnog napona. Kolika je relativna sistematska greška merenja?

Rešenje:
Voltmetar sa kretnim kalemom i jednostranim ispravljačem, kalibrisan da meri efektivnu vrednost prostoperiodičnog napona, ustvari meri srednju vrednost ispravljenog napona i množi je faktorom oblika 2.22. Ovaj faktor je određen tako da voltmetar, u slučaju očekivanog - prostoperiodičnog talasnog oblika, mereći srednju vrednost ipak pokazuje efektivnu vrednost. Za sve ostale talasne oblike nastaje sistematska greška zbog talasnog oblika.

Prvo je potrebno odrediti analitički oblik napona. U jednoj periodi, napon se ponaša po zavisnosti koja se može opisati jednačinom prave.

$$y = k\cdot x + n$$
$$-U = k\cdot 0 + n \Rightarrow n = -U$$
$$+U = k\cdot T + n = k\cdot T - U \Rightarrow k = \frac{2U}{T}$$
$$u(t) = \frac{2U}{T}\cdot t - U$$



Za tačnu vrednost ćemo uzeti efektivnu vrednost dovedenog napona.

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T u^2(t)\cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\left(\frac{2U}{T}\cdot t - U\right)^2\cdot dt}$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\left[\frac{4\cdot U^2}{T^2}\cdot t^2 - \frac{4\cdot U^2}{T}\cdot t + U^2\right]\cdot dt}$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{4\cdot U^2}{T^2}\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{4\cdot U^2}{T}\cdot\frac{t^2}{2} + U^2\cdot t\right]_0^T}$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{4\cdot U^2}{T^2}\cdot\frac{T^3}{3} - \frac{4\cdot U^2}{T}\cdot\frac{T^2}{2} + U^2\cdot T\right]}$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[T\cdot\frac{4}{3}\cdot U^2 - T\cdot 2\cdot U^2 + U^2\cdot T\right]} = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

$$U_{tac} = U_{ef} = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

Za merenu vrednost ćemo uzeti pokazivanje opisanog instrumenta. Prvo je potrebno odrediti oblik signala nakon jednostranog ispravljača.

$$u'(t) = \begin{cases} 0 & ,0 < t < T/2 \\ \frac{2U}{T}\cdot t - U & ,T/2 < t < T \end{cases}$$

$$U_{sr} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T u'(t)\cdot dt = \frac{1}{T}\cdot\int_{T/2}^T \left(\frac{2U}{T}\cdot t - U\right)\cdot dt = \frac{1}{T}\cdot P_\Delta = \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(T - \frac{T}{2}\right)\cdot(U - 0)$$

Srednju vrednost možemo odrediti rešavanjem integrala, ali i preko površine koju podintegralna funkcija definiše prema horizontalnoj osi.

$$U_{sr} = \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{T}{2}\cdot U \Rightarrow U_{sr} = \frac{U}{4}$$

$$U_{mer} = 2.22\cdot U_{sr} = 2.22\cdot\frac{U}{4} = 0.555U$$

$$\Gamma_{\%} = 100\cdot\left(\frac{U_{mer}}{U_{tac}} - 1\right) = -3.81\%$$

10. Periodičan napon dovoljno visoke frekvencije, talasnog oblika datog funkcijom $u(t) = -\frac{t\cdot U}{T} + U_0$, $\frac{U_0}{U} = 0.1$, $0 < t < T$, $U_0 > 0$, doveden je na voltmetar sa kretnim kalemom i dvostranim ispravljačem, kalibrisanim da meri efektivnu vrednost prostoperiodičnog napona. Koliko iznosi relativna sistematska greška merenja?

Rešenje:

Tačna vrednost je efektivna vrednost. Treba je odrediti po definiciji.

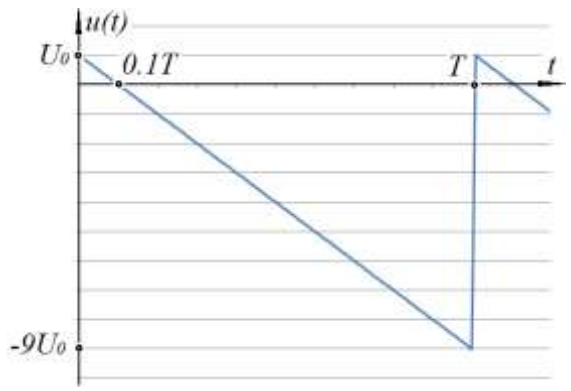
$$U_{tac} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\left(-\frac{t\cdot U}{T} + U_0\right)^2\cdot dt}$$

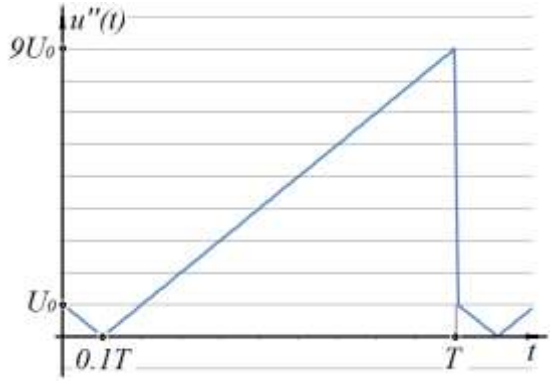
$$U_{tac} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T\left(\frac{U^2}{T^2}\cdot t^2 - 2\cdot\frac{U\cdot U_0}{T}\cdot t + U_0{}^2\right)\cdot dt}$$

$$U_{tac} = \sqrt{\left(\frac{U^2}{T^3}\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{2\cdot U\cdot U_0}{T^2}\cdot\frac{t^2}{2} + \frac{U_0{}^2}{T}\cdot t\right)\Bigg|_0^T}$$

$$U_{tac} = 0.493\,U$$

Merena vrednost je pokazivanje instrumenta sa kretnim kalemom. Instrument množi faktorom oblika 1.11 srednju vrednost dvostrano ispravljenog napona. Imajući u vidu oblik napona *u(t)*, napon nakon dvostranog ispravljača će biti definisan funkcijom *u''(t)*.





$$u''(t)=\begin{cases} -\dfrac{t\cdot U}{T}+U_0 & ,0<t<0.1T \\ -\left(-\dfrac{t\cdot U}{T}+U_0\right) & ,0.1T<t<T \end{cases}$$

Srednju vrednost je lakše rešiti preko površina dva trougla.

$$U_{sr}=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T u''(t)\cdot dt=\frac{1}{T}\cdot\left[P_{\Delta 1}+P_{\Delta 2}\right]=\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 0.1T\cdot 0.1U+\frac{1}{2}\cdot 0.9T\cdot 0.9U\right]$$

$$U_{sr}=\frac{0.01\cdot U}{2}+\frac{0.81\cdot U}{2}=0.41\cdot U$$

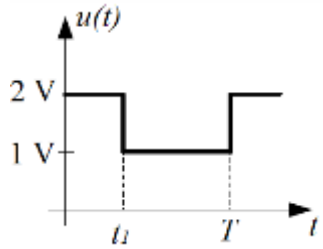
$$U_{mer}=1.11\cdot U_{sr}=0.455\cdot U$$

$$\Gamma_{\%}=100\cdot\left(\frac{U_{mer}}{U_{tac}}-1\right)=-7.69\ \%$$

11. Periodičan napon $u(t)$ talasnog oblika prikazanog na slici doveden je na voltmetar sa mekim gvožđem. Koliki je odnos t_1/T ako voltmetar pokaže napon od 1.2 V?

Rešenje:
Instrument sa mekim (pokretnim) gvožđem meri efektivnu vrednost po definiciji. Prvo je potrebno napisati analitički oblik napona *u(t)* u zavisnosti od vremena.

$$u(t)=\begin{cases} 2\ \text{V} & ,\quad 0<t<t_1 \\ 1\ \text{V} & ,\quad t_1<t<T \end{cases}$$



$$U_{ef}=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left(\int_0^{t_1}2^2\cdot dt+\int_{t_1}^{T}1^2\cdot dt\right)}$$

$$U_{ef}=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[4\cdot t_1+T-t_1\right]}=\sqrt{3\cdot\frac{t_1}{T}+1}=1.2\,V$$

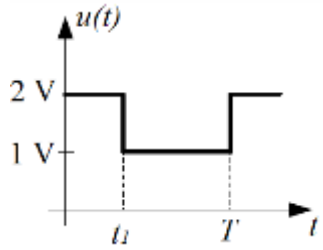
$$3\cdot\frac{t_1}{T}+1=1.2^2$$

$$\frac{t_1}{T}=0.15$$

12. Periodičan napon $u(t)$ talasnog oblika prikazanog na slici doveden je na voltmetar sa kretnim kalemom. Koliki je odnos t_1/T ako voltmetar pokaže napon od 1.2 V?

Rešenje:
Instrument sa kretnim kalemom meri srednju vrednost po definiciji.

$$u(t) = \begin{cases} 2\,\text{V} & , \quad 0 < t < t_1 \\ 1\,\text{V} & , \quad t_1 < t < T \end{cases}$$



$$U_{sr} = 1.2\,V = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot dt$$

U ovom slučaju se računanje integrala može zameniti određivanjem površina dva pravougaonika.

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \cdot \left[P_{pr1} + P_{pr2}\right] = \frac{1}{T} \cdot \left[2 \cdot t_1 + 1 \cdot (T - t_1)\right]$$

$$U_{sr} = 2 \cdot \frac{t_1}{T} + 1 - \frac{t_1}{T} = \frac{t_1}{T} + 1$$

$$\frac{t_1}{T} = 0.2$$

13. Voltmetru dometa 15 V i klase tačnosti 0.5, čija je unutrašnja otpornost 15 kΩ ± 15 Ω, radi proširivanja mernog opsega vezan je na red predotpornik od 15 kΩ ± 75 Ω. Koju klasu tačnosti novodobijenog voltmetra treba očekivati?

Rešenje:

voltmetar V_0:

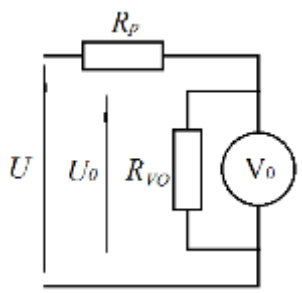
$$U_{\max_0} = 15\,\text{V}$$

$$kl_{V_0} = 0.5$$

$$R_{V_0} = 15\,\text{k}\Omega \pm 15\,\Omega$$

predotpor:

$$R_p = 15\,\text{k}\Omega \pm 75\,\Omega$$



Predotpor R_p i voltmetar V_0 čine novi voltmetar V koji ima duplo veći opseg, pošto je R_p jednako unutrašnjoj otpornosti R_{V0}.

$$U_{\max_0} = U_{\max} \cdot \frac{R_{V0}}{R_{V0} + R_P} \quad \Rightarrow U_{\max} = U_{\max_0} \cdot \frac{R_{V0} + R_P}{R_{V0}} = 30\,\text{V}$$

U svakom trenutku važi

$$U = U_0 \cdot \frac{R_{V0} + R_P}{R_{V0}}$$

$$kl_V = \frac{\Delta U}{U_{\max}} \cdot 100$$

Ukupna greška novog voltmetra potiče od greške koju pravi polazni voltmetar V_0, kao i netačnost unutrašnje otpornosti osnovnog voltmetra R_{V0} i otpornosti predotpora R_P.

$$|\Delta U| \le \left| \frac{\partial U}{\partial R_{V_0}} \cdot \Delta R_{V_0} \right| + \left| \frac{\partial U}{\partial U_0} \cdot \Delta U_0 \right| + \left| \frac{\partial U}{\partial R_P} \cdot \Delta R_P \right|$$

$$|\Delta U| \le \left| U_0 \cdot \frac{R_{V0} - (R_{V0} + R_P) \cdot 1}{R_{V0}^{\ 2}} \cdot \Delta R_{V0} \right| + \left| \frac{R_{V0} + R_P}{R_{V0}} \cdot \Delta U_0 \right| + \left| \frac{U_0}{R_{V0}} \cdot \Delta R_P \right|$$

$$|\Delta U| \le \left| 15\ \text{V} \cdot \frac{15\ \text{k}\Omega}{(15\ \text{k}\Omega)^2} \cdot 15\ \Omega \right| + \left| \frac{15\ \text{k}\Omega + 15\ \text{k}\Omega}{15\ \text{k}\Omega} \cdot \frac{0.5}{100} \cdot 15\ \text{V} \right| + \left| \frac{15\ \text{V}}{15\ \text{k}\Omega} \cdot 75\ \Omega \right|$$

$$|\Delta U| \le 0.24\ \text{V}$$

$$kl_V = \frac{0.24\ \text{V}}{30\ \text{V}} \cdot 100 = 0.8$$

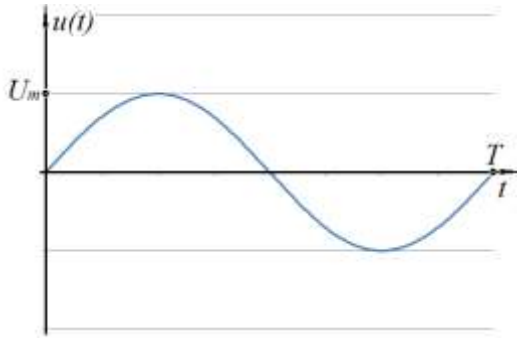
Napomena:
Iako je račun dao rezultat 0.8, usvajamo prvu veću vrednost koja je standardom dozvoljena, a to je 1. Ovde ne važi da se rezultat zaokružuje na bližu vrednost! Ako bismo izvršili zaokruživanje na manju vrednost, bili bismo nekorektni prema korisniku novodobijenog voltmetra, jer bi on zaključio da je maksimalna apsolutna greška manja nego što može da se desi u najgorem slučaju.

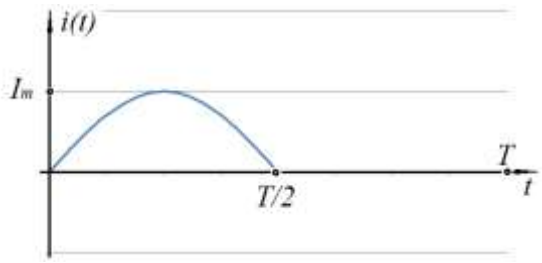
14. Za merenje naizmeničnog napona na raspolaganju je mikroampermetar sa kretnim kalemom, dometa 100 μA i unutrašnje otpornosti 2 kΩ, i jednostrani ispravljač. Kolika treba da bude vrednost predotpornika kojeg treba upotrebiti da bi tako dobijeni voltmetar mogao da meri naizmenični napon efektivne vrednosti do 10 V?

Rešenje:

$$\mu A: \quad \text{kretni kalem}, \quad I_{\mu A_{\max}} = 100\ \mu\text{A}, \quad R_{\mu A} = 2\ \text{k}\Omega$$

$$U_{ef} = 10\ \text{V} \Rightarrow U_m = U_{ef} \cdot \sqrt{2} = 14.14\ \text{V}$$





Iako je napon prostoperiodičan amplitude U_m, struja kroz instrument će, zbog jednostranog ispravljača, teći samo za vreme pozitivne poluperiode. Predotpor se vezuje redno sa mikroampermetrom i njegova vrednost se bira tako da se pri maksimalnom naponu na ulazu dobije maksimalni otklon na mikroampemetru.

$$I_m = \frac{U_m}{R_P + R_{\mu A}}$$

Mikroampermetar sa kretnim kalemom će skrenuti srazmerno srednjoj vrednosti struje. Kada je napon na ulazu maksimalan (efektivne vrednosti 10 V), tada mikroampermetar treba da napravi maksimalan otklon, odnosno srednja vrednost struje koja teče kroz njega treba da bude jednaka njegovom dometu.

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \left\{ \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t \cdot dt + \int_{T/2}^{T} 0 \cdot dt \right\} = \frac{I_m}{\pi}$$

$$I_{sr\max} = I_{sr}\Big|_{U_{eff}=10\text{ V}} = 100\ \mu\text{A}$$

Količnik amplitude napona i amplitude struje predstavlja otpornost redne veze otpornika R_P i $R_{\mu A}$.

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{ef} \cdot \sqrt{2}}{\pi \cdot I_{sr}} = R_{\mu A} + R_P$$

$$R_P = \frac{10\text{ V} \cdot \sqrt{2}}{\pi \cdot 100\ \mu\text{A}} - R_{\mu A}$$

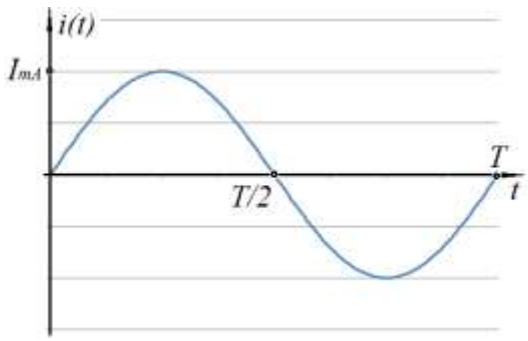
$$R_p = 43\ \text{k}\Omega$$

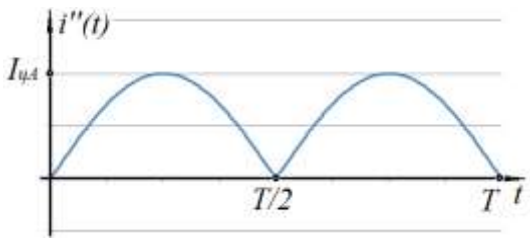
15. Za merenje naizmenične struje na raspolaganju je mikroampermetar sa kretnim kalemom, dometa 100 μA i unutrašnje otpornosti 2 kΩ, i dvostrani ispravljač. Kolika treba da bude vrednost šanta kojeg treba upotrebiti da bi tako dobijeni miliampermetar mogao da meri naizmeničnu struju efektivne vrednosti do 1 mA?

Rešenje:

μA: kretni kalem, $I_{\mu A\max} = 100\ \mu\text{A}$, $R_{\mu A} = 2\ \text{k}\Omega$

$$I_{mA\max} = I_{ef\max} \cdot \sqrt{2} = 1.4142\ \text{mA}$$





Kada je struja realizovanog mA-metra maksimalna I_{mA}, onda i struja kroz mikroampermetar takođe dostiže maksimalnu vrednost $I_{\mu A}$. Struja mA-metra teče kroz paralelnu vezu šanta i mikroampermetra, dok struja mikroampermetra teče samo kroz mikroampermetar.

$$I_{\mu A} \cdot R_{\mu A} = I_{mA} \cdot \left[R_{\mu A} \| R_{š}\right] = \frac{I_{mA}}{\frac{1}{R_{\mu A}} + \frac{1}{R_{š}}}$$

Za maksimalnu struju mA-metra (domet 1 mA) treba da se dobije maksimalan otklon osnovnog mikroampermetra, odnosno treba da srednja vrednost struje kroz mikroampermetar bude jednaka njegovom dometu.

$$I_{mA\max} = \sqrt{2} \cdot 1\,mA \Rightarrow \overline{I_{\mu A}} = 100\ \mu A$$

$$\overline{I_{\mu A}} = \frac{1}{T} \cdot 2 \cdot \int_0^{T/2} I_{\mu A_m} \cdot \sin \omega t \cdot dt = \frac{2 \cdot I_{\mu A_m}}{\pi} = 100\ \mu A$$

$$I_{\mu A_m} = 157\ \mu A$$

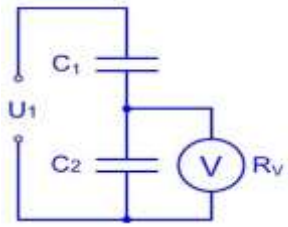
$$I_{\mu A_m} \cdot R_{\mu A} = I_{mA_m} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_{\mu A}} + \frac{1}{R_{š}}}$$

$$\frac{1}{R_{š}} = \frac{I_{mA_m}}{I_{\mu A_m} \cdot R_{\mu A}} - \frac{1}{R_{\mu A}}$$

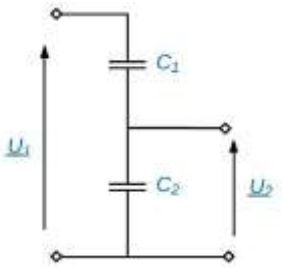
$$R_{š} = \left[\frac{I_{mA_m}}{I_{\mu A_m} \cdot R_{\mu A}} - \frac{1}{R_{\mu A}}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{R_{\mu A}} \cdot \left(\frac{I_{mA_m}}{I_{\mu A_m}} - 1\right)\right]^{-1} = \left[\frac{1}{2000} \cdot \left(\frac{1.4142\,mA}{157\ \mu A} - 1\right)\right]^{-1}$$

$$R_{š} = 250\ \Omega$$

16. Za merenje visokih napona koristi se kapacitivni delitelj, prikazan na slici, koji snižava napon U_1 u odnosu 30:1. Koliko iznosi sistematska greška merenja ulaznog napona usled konačne unutrašnje otpornosti voltmetra V, koja je jednaka modulu impedanse kondenzatora C_2?



Rešenje:
Nazivni odnos kapacitivnog delitelja napona količnik ulaznog i izlaznog napona.



$$n = \frac{|\underline{U_1}|}{|\underline{U_2}|} = \frac{U_1}{U_2}$$

$$\underline{U_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} \cdot \underline{U_1} = \frac{\frac{1}{C_2}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \cdot \underline{U_1} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \underline{U_1}$$

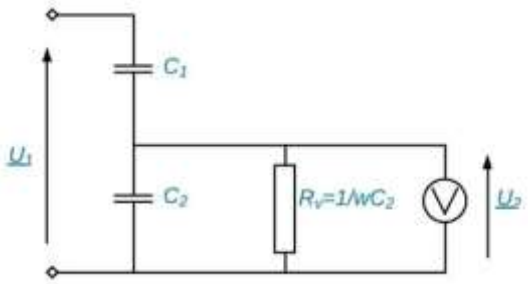
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} = n \Rightarrow (n-1) \cdot C_1 = C_2$$

Treba primetiti da je kod kapacitivnog delitelja formula drugačija nego kod otpornog delitelja. Kod otpornog delitelja "donji" otpornik treba da je (*n-1*) puta manji od "gornjeg", da

bi se dobilo deljenje napona *n* puta. Ovo je zbog izraza za impedansu kondenzatora, koja je obrnuto proporcionalna vrednosti kapacitivnosti.
Ako je voltmetar idealan, onda važi da je $U_1 = n \cdot U_2$. Pošto u zadatku voltmetar nije idealan, onda množenjem očitanog napona U_2 koeficijentom n nećemo dobiti pravu vrednost, nego merenu vrednost:

$$U_{1mer} = n \cdot U_2$$

Da bismo dobili tačnu vrednost $U_{1tač}$ moramo uzeti u obzir R_v



$$\underline{U_2} = \frac{\underline{Z_e}}{\underline{Z_e} + \frac{1}{j\omega C_1}} \cdot \underline{U_1} \;;\; \underline{Z_e} = R_v \parallel \frac{1}{j\omega C_2}$$

$$\underline{Z_e} = \frac{R_v \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_v + \frac{1}{j\omega C_2}}$$

$$\underline{Z_e} = \frac{R_v \cdot \frac{R_v}{j}}{R_v + \frac{R_v}{j}} = \frac{\frac{R_v}{j}}{1 + \frac{1}{j}} = \frac{R_v}{1+j}$$

$$\underline{U_2} = \frac{\frac{R_v}{1+j}}{\frac{R_v}{1+j} + \frac{1}{j\omega C_1}} \cdot \underline{U_1} = \frac{1}{1 + (n-1) \cdot \frac{1+j}{j}} \cdot \underline{U_1}$$

$$\underline{U_2} = \frac{1}{1 - j(n-1)(1+j)} \cdot \underline{U_1} = \frac{\underline{U_1}}{1 - j(n-1) + (n-1)}$$

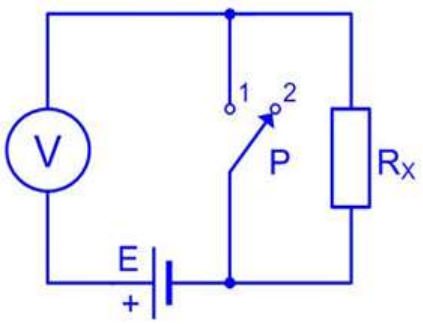
$$\left|\underline{U_2}\right| = U_2 = \frac{U_1}{\sqrt{n^2 + (n-1)^2}} = \frac{U_1}{\sqrt{2n^2 - 2n + 1}}$$

$$U_{1tac} = U_2 \cdot \sqrt{2n^2 - 2n + 1}$$

$$\Gamma_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{U_{1mer}}{U_{1tac}} - 1 \right) = 100 \cdot \left[\frac{n \cdot U_2}{U_2 \cdot \sqrt{2n^2 - 2n + 1}} - 1 \right]$$

$$\Gamma_{\%} = 100 \cdot \left[\frac{n}{\sqrt{2n^2 - 2n + 1}} - 1 \right] = -28.1\,\%$$

17. U položaju (1) prekidača *P*, voltmetar *V* sa kretnim kalemom pokazuje maksimalni otklon na skali koja ima 90 podeoka. Apsolutna greška očitavanja skretanja kazaljke voltmetra je jednaka na celom mernom opsegu instrumenta. Odrediti na kom podeoku na skali voltmetra je relativna greška merenja nepoznate otpornosti najmanja.



Rešenje:
Kada je prekidač u položaju 1, voltmetar je paralelno vezan izvoru. Činjenica da voltmetar tada ima maksimalan otklon govori da je opseg merenja voltmetra jednak naponu jednosmernog izvora.

$U_{V1} = E$

Kada je prekidač u položaju 2, unutrašnja otpornost voltmetra i nepoznati otpornik definišu naponski razdelnik, pri čemu voltmetar pokazuje napon na R_V.

$$U_{V2} = \frac{R_V}{R_V + R_X} \cdot E \Rightarrow U_{V2} = \frac{R_V}{R_V + R_X} \cdot U_{V1}$$

$$R_X = R_V \left(\frac{U_{V1}}{U_{V2}} - 1 \right)$$

Ovaj izraz treba diferencirati:

$$\Delta R_X = \frac{\partial R_X}{\partial R_V} \cdot \Delta R_V + \frac{\partial R_X}{\partial U_{V1}} \cdot \Delta U_{V1} + \frac{\partial R_x}{\partial U_{V2}} \cdot \Delta U_{V2}$$

Pošto je $\Delta R_V = 0$ izraz se uprošćava:

$$\Delta R_X = \frac{R_V}{U_{V2}} \cdot \Delta U_{V1} + \left(- R_V \cdot \frac{U_{V1}}{U_{V2}^2} \right) \cdot \Delta U_{V2}$$

Greške ΔU_{V1} i ΔU_{V2} ćemo izjednačiti sa najvećom greškom ΔU koja je definisana dometom i klasom tačnosti instrumenta.

Relativno iskazana greška je:

$$\left| \frac{\Delta R_X}{R_X} \right| = \frac{\frac{R_V}{U_{V2}} \cdot \Delta U + \frac{R_V}{U_{V2}} \cdot \frac{U_{V1}}{U_{V2}} \cdot \Delta U}{R_V \left(\frac{U_{V1}}{U_{V2}} - 1 \right)}$$

$$\frac{\Delta R_X}{R_X} = \frac{U_{\max} + U_{V2}}{U_{V2} \cdot (U_{\max} - U_{V2})} \cdot \Delta U = A(U_{V2})$$

Treba naći za koje U_{V2} funkcija $A(U_{V2})$ ima maksimum. Odredićemo prvi izvod, izjednačiti sa nulom i rešiti po U_{V2}

$$\frac{\partial A}{\partial U_{V2}} = \frac{U_{V2}(U_{\max} - U_{V2}) - (U_{\max} + U_{V2})(U_{\max} - 2U_{V2})}{U_{V2}^2 (U_{\max} - U_{V2})^2} = 0$$

$$U_{V2}^2 + U_{V2}(2U_{\max}) - U_{\max}^2 = 0$$

$$U_{V2} = \frac{-2U_{\max} + \sqrt{4U_{\max}^2 + 4U_{\max}^2}}{2}$$

$$U_{V2} = U_{\max}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$U = k \cdot \alpha$; $U_{\max} = k \cdot \alpha_{\max}$, $U_2 = k \cdot \alpha_2$

$$k \cdot \alpha_2 = k \cdot \alpha_{\max}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

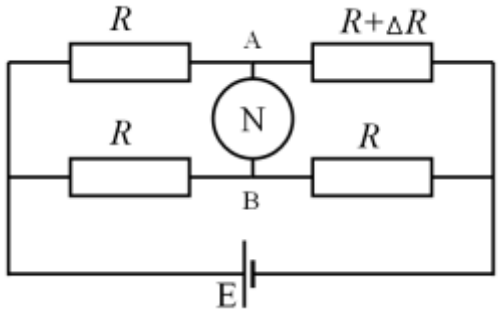
$$\alpha_2 = \alpha_{\max}\left(\sqrt{2} - 1\right) = 37.3 \text{ podeoka}$$

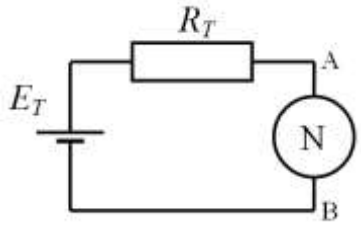
Na ovaj način smo pronašli ekstremnu vrednost funkcije. Strogo matematički gledano, još bi trebalo da se proveri vrednost sledećeg izvoda u istoj ovoj tački, da bismo bili sigurni da li je u pitanju maksimum ili minimum...

18. Vitstonov most za merenje otpornosti ima u sve četiri grane otpornosti od približno 1 kΩ i napaja se iz (idealnog) naponskog izvora napona 4 V. Kao indikator nule, koristi se instrument čija je strujna konstanta 1 μA/pod i unutrašnja otpornost 1 kΩ. Koliku još promenu merene otpornosti ovakav most može da detektuje?

Rešenje:

Ako su sva četiri otpornika u granama mosta iste otpornosti *R*, onda je most uravnoteže i indikator nule pokazuje nulu. Neka jedan od otpornika odstupa od nazivne vrednosti za *ΔR*. U tom slučaju treba odrediti struju koja protiče kroz indikator nule. Dogovorićemo se, zarad rešavanja zadataka, da je najmanji otklon koji posmatrač može da primeti jednak 1/10 podeoka. Ovde treba odrediti najmanje *ΔR* za koje se otklon baš jednak graničnoj vrednosti - 1/10 podeoka.





Zadatak se može rešiti primenom Tevenenove teoreme. Predstavimo sve osim indikatora nule preko Tevenenovih ekvivalentnih elemenata. R_T je ekvivalentna otpornost koja se dobija između tačaka A i B kada su nezavisni naponski izvori isključeni (kratak spoj).

$$R_T = (R\|R) + (R\|(R+\Delta R)) = \frac{R}{2} + \frac{R(R+\Delta R)}{(R+R+\Delta R)}$$

Za najmanje *ΔR* se sa sigurnošću može reći da je mnogo puta manje od *R*, pa se u sumi može zanemariti. Tada se za ekvivalentnu otpornost može napisati približan izraz.

$$R_T \approx \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

Ekvivalentni naponski izvor E_T je napon između tačaka A i B kada u kolu nema indikatora nule.

$$E_T = U_{AB} = V_A - V_B = \frac{R+\Delta R}{2R+\Delta R}\cdot E - \frac{R}{2R}\cdot E = E\cdot\frac{2R\cdot(R+\Delta R) - R\cdot(2R+\Delta R)}{2R\cdot(2R+\Delta R)} =$$

$$= \frac{2R + 2\cdot\Delta R - 2R - \Delta R}{4R + 2\cdot\Delta R}\cdot E = \frac{\Delta R}{4R+2\cdot\Delta R}\cdot E$$

I ovde se, nakon sređivanja brojioca, može zanemariti *ΔR* u sumi sa *R* u imeniocu. Dobija se približan izraz za ekvivalentni naponski generator.

$$E_T \approx \frac{\Delta R}{4R}\cdot U$$

Sada se lako može napisati izraz za struju koja protiče kroz indikator nule.

$$I = \frac{E_T}{R_N + R_T} = \frac{\Delta R}{4R}\cdot U\cdot\frac{1}{2R} = \frac{\Delta R}{8\cdot R^2}\cdot U \quad\Rightarrow\quad \Delta R = \frac{I\cdot 8R^2}{U}$$

Da bismo odredili najmanje ΔR koje je moguće primetiti ovim mostom, potrebno je u izraz uvrstiti najmanju vrednost struje koja se može detektovati indikatorom nule. To je struja koja odgovara najmanjem otklonu koji je moguće primetiti.

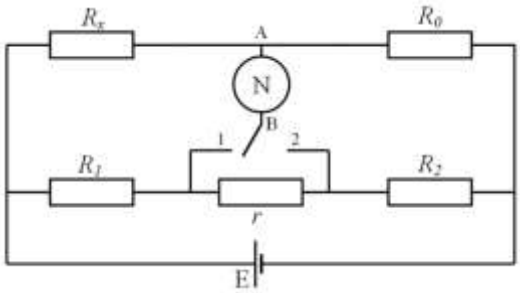
$$I_{\min} = \alpha_{\min} \cdot C = \frac{1}{10}\,\text{pod} \cdot 1\frac{\mu\text{A}}{\text{pod}} = 0.1\,\mu\text{A}$$

$$\Delta R = \frac{0.1\,\mu\text{A} \cdot 8 \cdot (1\,\text{k}\Omega)^2}{4\,\text{V}} = 0.2\,\Omega$$

Napomena:
Možemo proveriti pretpostavku o odnosu veličina ΔR i R. U konkretnom slučaju je ΔR je 5000 puta manje od R, tako da je zanemarivanje prilikom rešavanja zadatka bilo sasvim opravdano.

19.

Za merenje otpornosti Rx koristi se merno kolo prikazano na slici. Parametri kola su: R_0=1000 Ω, R_1=100 Ω, R_2=100 Ω i r=0.1 Ω. Kolika je merena otpornost R_x ako skretanje kazaljke indikatora nule iznosi 12 podeoka kada je preklopnik u položaju 1, a -18 podeoka kada je preklopnik u položaju 2? Indikator nule je osetljivi voltmetar dovoljno velike unutrašnje otpornosti. U tački A je plus kraj indikatora nule.



Rešenje:

Zbog velike otpornosti primenjenog voltmetra nije potrebno računati ekvivalentnu Tevenenovu otpornost (ne teče struja kroz voltmetar, pa nema ni pada napona na ekvivalentnoj otpornosti).

$$E_{T1} = E \cdot \left(\frac{R_0}{R_0 + R_X} - \frac{r + R_2}{r + R_1 + R_2} \right) = C_V \cdot \alpha_1$$

$$E_{T2} = E \cdot \left(\frac{R_0}{R_0 + R_X} - \frac{R_2}{r + R_1 + R_2} \right) = C_V \cdot \alpha_2$$

$$C_V = \frac{E}{\alpha_1} \cdot \left(\frac{R_0}{R_0 + R_X} - \frac{r + R_2}{r + R_1 + R_2} \right) = \frac{E}{\alpha_2} \cdot \left(\frac{R_0}{R_0 + R_X} - \frac{R_2}{r + R_1 + R_2} \right)$$

$$\frac{R_0}{R_0 + R_X} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) = \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{r + R_2}{r + R_1 + R_2} - \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{R_2}{r + R_1 + R_2}$$

$$\frac{R_0}{R_0 + R_X} \cdot \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \frac{1}{r + R_1 + R_2} \cdot \frac{\alpha_2 \cdot (r + R_2) - \alpha_1 \cdot R_2}{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$$

$$\frac{(R_0 + R_X) \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2}{R_0 \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)} = (r + R_1 + R_2) \cdot \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_2 \cdot (r + R_2) - \alpha_1 \cdot R_2}$$

$$R_X = \frac{(r + R_1 + R_2) \cdot R_0 \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_2 \cdot (r + R_2) - \alpha_1 \cdot R_2} - R_0 = 999.8\,\Omega$$

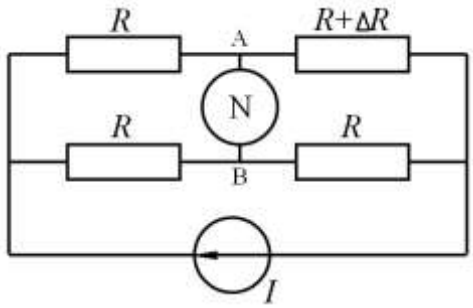
Napomena:

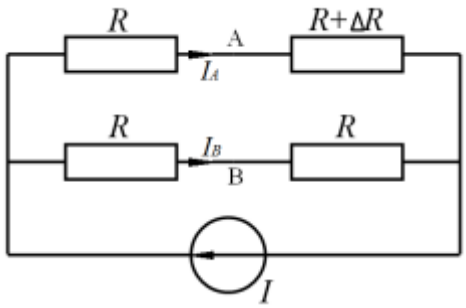
Ovaj zadatak je ilustracija realne situacije kada se u donje dve grane mosta koristi žičani potenciometar. Tada otpornici R_1, r i R_2 predstavljaju delove otpornosti potenciometara. Klizač potenciometra deli ukupnu otpornost na dva dela: levi i desni. Otpornik r predstavlja otpornost jednog zavojka žice u potenciometru. Zbog diskretne (skokovite) promene položaja klizača, i otpornosti se menjaju skokovito i nije moguće izvršiti potpuno uravnoteženje indikatora nule. Za jedan položaj se dobije minimalno skretanje kazaljke na jednu stranu (u zadatku je to +12 podeoka), a pri minimalnoj promeni položaja klizača dolazi do promene položaja kazaljke na drugu stranu (-18 podeoka). Čak i u ovom slučaju, kada nije moguće izvršiti uravnoteženje indikatora nule, a time ni mosta, na prikazani način se može dobiti vrlo kvalitetno merenje otpornosti!

20. Za merenje malih promena otpornosti otpornika od približno 100 Ω koristi se Vitstonov neuravnoteženi most. Odrediti granice greške merenja prouzrokovane neosetljivošću mosta ako se zna da otpornost otpornika u ostalim granama mosta iznosi 100 Ω , da se most napaja konstantnom strujom od 10 mA, da je strujna konstanta upotrebljenog indikatora nule 0.9 μA/pod i da je njegova unutrašnja otpornost 100 Ω.

Rešenje:

Obratiti pažnju da sada imamo izvor konstantne struje umesto (uobičajenog) izvora konstantnog napona. Kada se vrši određivanje ekvivalentnog otpora, potrebno je isključiti nezavisni strujni izvor, odnosno zameniti ga otvorenom vezom.





$$R_T = (R+R)\|(R+\Delta R+R) = 2R\|(2R+\Delta R)$$

$$R_T = \frac{2R\cdot(2R+\Delta R)}{2R+2R+\Delta R} = \frac{2R\cdot(2R+\Delta R)}{4R+\Delta R}$$

$$R_T \approx \frac{2R\cdot 2R}{4R} = R$$

Zanemarivanjem ΔR u sumi prema mnogo većoj vrednosti R, dobija se približan izraz.

Prilikom određivanja ekvivalentnog napona koristimo se formulama za strujne razdelnike, da bismo napisali jednačine struja koje teku kroz granu A i granu B.

$$E_T = V_A - V_B = (R+\Delta R)\cdot I_A - R\cdot I_B = (R+\Delta R)\frac{2R}{4R+\Delta R}I - R\cdot\frac{2R+\Delta R}{4R+\Delta R}I$$

$$E_T = \frac{\Delta R\cdot R}{4R+\Delta R}I \approx \frac{\Delta R}{4}\cdot I$$

$$I_N = \frac{E_T}{R_N + R_T} = \frac{E_T}{2R} = I \cdot \frac{\Delta R}{8 \cdot R}$$

$$\Delta R = \frac{I_N \cdot 8 \cdot R}{I}$$

Za najmanji mogući otklon koji se može detektovati, a koji odgovara 1/10 podeoka, odnosno za najmanju struju, dobija se i najmanje ΔR koje se može odrediti.

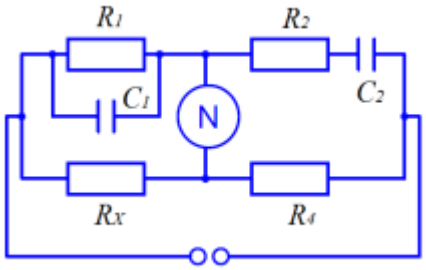
$$I_{N\min} = \frac{1}{10}\,\text{pod} \cdot 0.9\,\frac{\mu\text{A}}{\text{pod}}$$

$$\Delta R_{\min} = \frac{I_{N\min} \cdot 8 \cdot R}{I} = \frac{1}{10}\,\text{pod} \cdot 0.9\,\frac{\mu\text{A}}{\text{pod}} \cdot \frac{8 \cdot 100\,\Omega}{10\,\text{mA}} = 7.2\,\text{m}\Omega$$

21.

Naizmenični most, prikazan na slici, uravnotežen je za sledeće vrednosti elemenata: R_1=800 Ω; C_1=0.5 μF; R_2=400 Ω; C_2=1 μF i R_4=1000 Ω.

Izračunati frekvenciju napona napajanja pri kojoj je most u ravnoteži.



Rešenje:
Kada je most uravnotežen, važi jednakost proizvoda impedansi u naspramnim granama.

$$\left(R_1 \left\| \frac{1}{j\omega C_1}\right.\right) \cdot R_4 = R_X \cdot \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)$$

$$\frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \cdot R_4 = R_X \cdot R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \cdot R_X$$

$$\frac{R_1 \cdot R_4}{j\omega C_1 R_1 + 1} = R_X \cdot R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \cdot R_X$$

$$R_1 \cdot R_4 = j\omega C_1 \cdot R_1 \cdot R_X \cdot R_2 + \omega C_1 \cdot R_X \cdot R_1 \cdot \frac{1}{\omega C_2} + R_X \cdot R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \cdot R_X$$

$$R_1 \cdot R_4 = R_X \cdot \left(R_1 \cdot \frac{C_1}{C_2} + R_2\right) + j \cdot R_X \left(\omega \cdot C_1 \cdot R_1 \cdot R_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$$

Jedna kompleksna jednačina u sebi sadrži dve realne. Posebno ćemo izdvojiti realni i

imaginarni deo jednačine.

$$R_1 \cdot R_4 = R_X \cdot \left(R_2 + \frac{C_1}{C_2} \cdot R_1\right)$$

$$R_X = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_2 + \frac{C_1}{C_2} \cdot R_1} = 1000\,\Omega$$

$$R_X \left(\omega \cdot C_1 \cdot R_1 \cdot R_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = 0$$

$$\omega \cdot C_1 \cdot R_1 \cdot R_2 = \frac{1}{\omega C_2}, \quad \omega^2 = \frac{1}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}, \quad \omega = 2500, \quad f = 397.887\ \text{Hz}$$

22. U grani "1" Vitstonovog mosta za naizmeničnu struju prikazanog na slici nalazi se kondenzator reaktanse 2 kΩ, u grani "2" otpornik od 0.5 kΩ, a u grani "4" redna veza otpornika od 0.5 kΩ i kalema reaktanse 1.5 kΩ. U grani "3" su elementi podešeni tako da most bude u ravnoteži. Koliki je fazni ugao impedanse u grani "3"?

Rešenje:

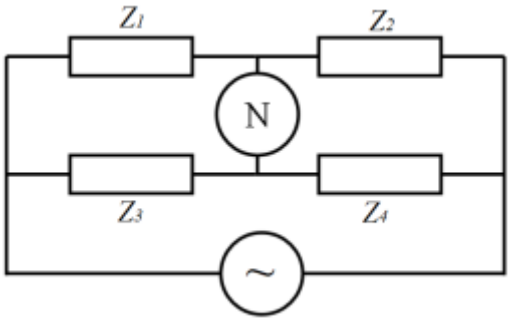
$$\underline{Z_1} = -j \cdot X_C = -j \cdot 2\ \text{k}\Omega$$

$$\underline{Z_2} = 0.5\ \text{k}\Omega$$

$$\underline{Z_4} = 0.5\ \text{k}\Omega + j \cdot 1.5\ \text{k}\Omega$$

$$\underline{Z_3} = ?$$

$$\arg\{\underline{Z_3}\} = ?$$



Kada je most uravnotežen, važi jednakost proizvoda impedansi u naspramnim granama.

$$\underline{Z_2} \cdot \underline{Z_3} = \underline{Z_1} \cdot \underline{Z_4}$$

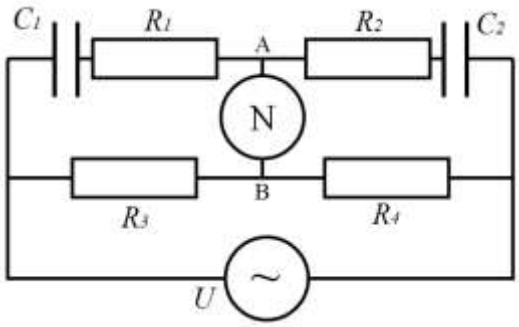
$$\underline{Z_3} = \frac{\underline{Z_1} \cdot \underline{Z_4}}{\underline{Z_2}} = \frac{(-j \cdot 2\ \text{k}\Omega)(0.5\ \text{k}\Omega + j \cdot 1.5\ \text{k}\Omega)}{0.5\ \text{k}\Omega}$$

$$\underline{Z_3} = 6\ \text{k}\Omega - j \cdot 2\ \text{k}\Omega$$

$$\varphi_3 = \arg\{\underline{Z_3}\} = arctg\left(\frac{\text{Im}\{\underline{Z_3}\}}{\text{Re}\{\underline{Z_3}\}} \right) = arctg\left(\frac{-2}{6}\right) = -18.43°$$

23. Most prikazan na slici, sa otpornicima R_3=1 kΩ i R_4=1 kΩ, napaja se iz izvora napona efektivne vrednosti 15 V i frekvencije 1592 Hz. Uravnotežen je za R_2=1 kΩ i C_2=0.1 μF. Koliko će da skrene kazaljka indikatora nule, čija je naponska konstanta 1 mV/pod i unutrašnja otpornost dovoljno velika, ako se otpornost R_2 promeni za 1 Ω?

$R_4 = R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\Delta R_2 = 1\,\Omega$
$C_2 = 0.1\,\mu\mathrm{F}$
$U = 15\ \mathrm{V}$
$f = 1592\ \mathrm{Hz}$
$C_V = 1\,\mathrm{mV/pod}$



Rešenje:
Kada je most uravnotežen, važi jednakost proizvoda impedansi u naspramnim granama. Uzimajući u obzir da su otpornosti R_3 i R_4 jednake imamo:

$$\underline{Z_2} \cdot \underline{Z_3} = \underline{Z_1} \cdot \underline{Z_4}$$
$$\underline{Z_2} \cdot R_3 = \underline{Z_1} \cdot R_4$$
$$\underline{Z_2} = \underline{Z_1}$$
$$C_X = C_2 = 0.1\,\mu F, \quad R_X = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$$

Kada je most neuravnotežen, može se predstaviti Tevenenovim elementima. Pošto je indikator nule voltmetar (data je osetljivost u mV/podeoku), a nije navedena njegova unutrašnja otpornost, smatraćemo da je beskonačna. U tom slučaju nema potrebe da se određuje ekvivalentna impedansa.

$$\underline{E_T} = \underline{U_{AB}} = \underline{V_A} - \underline{V_B}$$

Potencijal V_A je određen napajanjem U i komponentama mosta u granama 1 i 2. Potencijal V_B je određen napajanjem mosta i otpornicima R_3 i R_4. Interesuje nas ekvivalentni napon kada se otpornost R_2 promeni za ΔR=1 Ω u odnosu na vrednost za koju se ima uravnotežen most (1 kΩ).

$$\underline{E_T} = \underline{U} \cdot \frac{R_2 + \Delta R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2}}{R_X + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_X} + \dfrac{1}{j\omega C_2} + \Delta R_2} - \underline{U} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$\underline{E_T} = \underline{U} \cdot \left(\frac{1\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\Omega + \dfrac{1}{j \cdot 2\pi \cdot 1592 \cdot 0.1\,\mu\mathrm{F}}}{1\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} + \dfrac{1}{j \cdot 2\pi \cdot 1592 \cdot 0.1\,\mu\mathrm{F}} \cdot 2 + 1} - \frac{1\,\mathrm{k\Omega}}{1\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega}} \right)$$

Ovde je bitno prvo srediti vrednost u zagradi, pa tek onda odrediti moduo kompleksnog predstavnika. Podsetnik iz matematike: moduo proizvoda (količnika) kompleksnih brojeva **je jednak** proizvodu (količniku) modula kompleksnih brojeva. Moduo zbira (razlike) **nije jednak** zbiru (razlici) modula kompleksnih brojeva.

$$\underline{E_T} = \left|\underline{E_T}\right| = 15\ \mathrm{V} \cdot \left| \left(\frac{1001\,\Omega - j \cdot 999.72\,\Omega}{2001\,\Omega - j \cdot 1999.43\,\Omega} - \frac{1}{2} \right) \right|$$

$$E_T = 15\ \text{V} \cdot \left| \frac{2 \cdot (1001\,\Omega - j \cdot 999.72\,\Omega) - (2001\,\Omega - j \cdot 1999.43\,\Omega)}{2 \cdot (2001\,\Omega - j \cdot 1999.43\,\Omega)} \right|$$

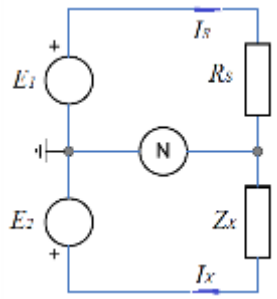
$$E_T = 15\ \text{V} \cdot \left| \frac{1\,\Omega}{2 \cdot (2001\,\Omega - j \cdot 1999.43\,\Omega)} \right| = \frac{15\ \text{V}}{2 \cdot \sqrt{(2001)^2 + (1999.43)^2}}$$

$$E_T = 2.65\ \text{mV}$$

Pošto je konstanta voltmetra (indikatora nule) 1 mV/podeoku, onda se za otklon dobija brojno ista vrednost kao i za napon iskazan u mV.

$$\alpha = \frac{E_T}{C} = 2.65\ \text{pod}$$

24.



Impedansa Zx meri se mostom sa dva izvora.
Ravnoteža mosta postignuta je za

$\underline{E_1} = 10\ \text{V}$, $\underline{E_2} = 3 \cdot e^{-j \cdot 110°}\ \text{V}$, $R_S = 15\ \text{k}\Omega$.

Kolika je impedansa Zx?

Rešenje:

Na slici su prikazana dva naizmenična izvora, kod kojih je znakom "+" obeležen tzv "vrući" kraj. Uobičajeno je da je jedan kraj laboratorijskih izvora uzemljen i da se za povezivanje koriste koaksijalni kablovi. Uzemljavanjem spoljašnjeg provodnika se štiti od smetnji signal koji se prosleđuje unutrašnjim provodnikom.

Kada je most u ravnoteži, nema struje kroz indikator nule, pa su onda struje I_S i I_X jednake.

$$\underline{I_S} = \underline{I_X}$$

$$\underline{I_S} = \frac{\underline{E_1}}{R_S}$$

$$\underline{I_X} = \frac{-\underline{E_2}}{\underline{Z_X}}$$

$$\frac{\underline{E_1}}{R_S} = \frac{-\underline{E_2}}{\underline{Z_X}}$$

$$\underline{Z_X} = -\frac{\underline{E_2}}{\underline{E_1}} \cdot R_S = -\frac{3 \cdot e^{-j \cdot 110°}}{10} \cdot 15\ \text{k}\Omega$$

$$\underline{Z_X} = -4.5 \cdot e^{-j \cdot 110°}\ \text{k}\Omega = -4.5 \cdot [\cos(-110°) + j \cdot \sin(-110°)]\ \text{k}\Omega$$

$$\underline{Z_X} = -4.5 \cdot [-0.342 + j \cdot (-0.940)]\ \text{k}\Omega$$

$$\underline{Z_X} = (1.54 + j \cdot 4.23)\ \text{k}\Omega$$

25. Za poznati napon od 1.2 V, na skali potenciometra, pri uravnoteženom kompenzatoru, očitana je vrednost 12 podeoka, a za nepoznati napon je dobijeno očitavanje od 18 podeoka. Koliki je mereni napon?

Rešenje:
Kada je kompenzator uravnotežen, očitani broj podeoka je srazmeran merenom naponu. Obeležimo sa E elektromotornu silu pomoćnog izvora, a sa α_{max} maksimalni broj podeoka na potenciometru.

Kada je na kompenzator doveden napon U_1, ravnoteža se dobija za položaj klizača α_1.

$$U_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_{\max}} E$$

Kada je na kompenzator doveden napon U_2, ravnoteža se dobija za položaj klizača α_2.

$$U_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_{\max}} E$$

Eliminacijom elektromotorne sile pomoćnog izvora E, dobijamo izraz za U_2.

$$U_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} U_1 = \frac{18}{12} \cdot 1.2 = 1.8 \text{ V}$$

Napomena:
Nije neophodno poznavanje vrednosti elektromotorne sile pomoćnog izvora. Važno je samo da se ta vrednost ne menja u toku merenja.

26. Elektromotorna sila izvora jednosmernog napona meri se prvo voltmetrom unutrašnje otpornosti 3 kΩ, a zatim kompenzatorom. Rezultati merenja su 2.5 V, odnosno 5 V. Kolika je unutrašnja otpornost izvora?

Rešenje:
Realan naponski izvor, pored elektormotorne sile, sadrži i unutrašnju otpornost. Usled proticanja struje, javlja se pad napona na unutrašnjoj otpornosti i dobija manji napon nego što je elektromotorna sila. Da bi se izmerila baš elektromotorna sila, ne sme se konzumirati struja prilikom merenja. To se postiže, teoretski korišćenjem voltmetra beskonačne otpornosti. Nažalost, takvi voltmetri ne postoje. Druga mogućnost je korišćenje kompenzatora. U trenutku očitavanja položaja klizača u kompenzatorskoj metodi iz izvora ne teče struja (indikator nule pokazuje nulu), pa je mereni napon baš jednak elektromotornoj sili, jer nema pada napona na unutrašnjoj otpornosti izvora.

Ovo znači da je vrednost dobijena kompenzatorom jednaka elektromotornoj sili. Vrednost očitana na voltmetru konačne unutrašnje otpornosti je napon dobijen po naponskom otporničkom razdelniku.

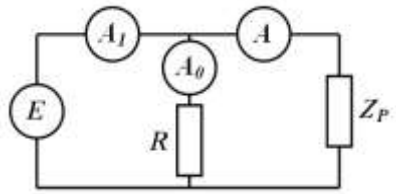
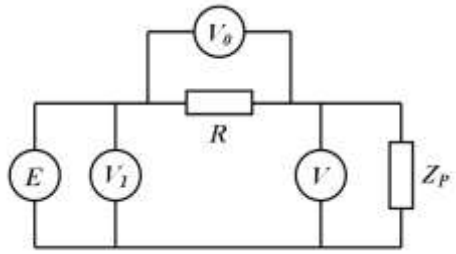
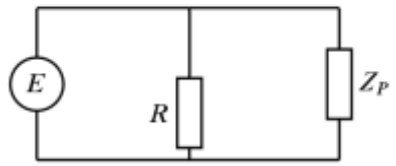
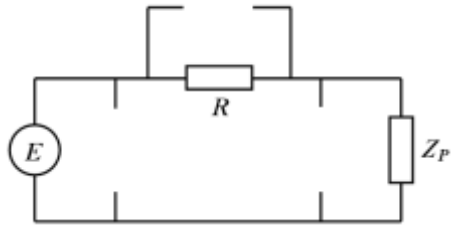
$$U_V = \frac{R_V}{R_V + R_E} E$$

$$R_E = \frac{R_V E}{U_V} - R_V$$

$$R_E = \frac{3 \text{ k} \cdot 5}{2.5} - 3 \text{ k} = 3 \text{ k}$$

27. Metodom tri ampermetra merena je aktivna snaga i faktor snage monofaznog potrošača. Dobijeno je 100 W i faktor snage jednak 0.3. Kolika će da bude aktivna snaga istog potrošača ako se izmeri i metodom tri voltmetra, uz korišćenje istog izvora i istog otpornika, jednakog modulu impedanse potrošača? (Korišćeni instrumenti i izvor napona mogu se smatrati idealnim).

Rešenje:
Pošto su instrumenti idealni, možemo ampermetre zameniti kratkim spojem, a voltmetre otvorenom vezom. Tada dobijamo dve jednostavne šeme. Aktivna snaga je jednaka proizvodu efektivne vrednosti (moduo kompleksnog predstavnika) napona, efektivne vrednosti struje i faktora snage.

Metoda tri ampermetra	Metoda tri voltmetra
	
	
$P_{3A} = U_Z \cdot I_Z \cdot \cos\phi = \lvert\underline{E}\rvert \cdot \left\lvert\frac{\underline{E}}{\underline{Z_P}}\right\rvert \cdot \cos\phi = \frac{E^2}{Z_P}\cos\phi$	$P_{3V} = \left\lvert\frac{\underline{Z_P}}{\underline{Z_P}+R}\underline{E}\right\rvert \cdot \left\lvert\frac{\underline{E}}{\underline{Z_P}+R}\right\rvert \cdot \cos\varphi$

Kod metode merenja snage i faktora snage pomoću tri ampermetra, imamo situaciju da je napon izvora E na krajevima impedanse Z_P.
Kod metode merenja snage i faktora snage pomoću tri voltmetra imamo situaciju da napon izvora E napaja rednu vezu otpornika R i impedanse Z_P.
Faktor snage cosφ je osobina impedanse (definisan je odnosom aktivnog i reaktivnog dela impedanse), pa je za impedansu Z_P jednak u obe šeme.

$$P_{3V} = \frac{Z_P \cdot E^2}{\left|\underline{Z_P}+R\right|^2} \cdot \cos\varphi = \frac{{Z_P}^2}{\left|\underline{Z_P}+R\right|^2} P_{3A}$$

$$P_{3V} = \frac{{Z_P}^2}{\left|R + Z_P\cos\varphi + jZ_P\sin\varphi\right|^2} P_{3A}$$

$$P_{3V} == \frac{{Z_P}^2}{R^2 + 2RZ_P\cos\varphi + {Z_P}^2\cos^2\varphi + {Z_P}^2\sin^2\varphi} P_{3A}$$

$$P_{3V} = \frac{Z_P{}^2}{R^2 + 2RZ_P \cos\varphi + Z_P{}^2} P_{3A}$$

Po uslovu zadatka je otpornost pomoćnog otpornika jednaka modulu impedanse.

$$R = |Z_p| = Z_P$$

$$P_{3V} = \frac{R^2}{R^2 + 2R^2 \cos\varphi + R^2} P_{3A} = \frac{1}{2 + 2\cos\varphi} P_{3A}$$

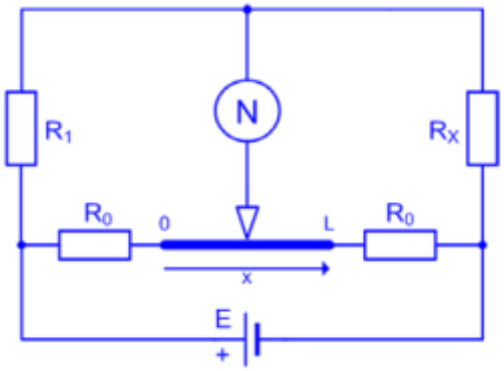
$$P_{3V} = \frac{1}{2(1+0.3)} \cdot 100\ \text{W} = 38\ \text{W}$$

28. Za merenje nepoznate otpornosti R_X se koristi uravnoteženi most kao na slici. Dve grane mosta čine otporna žica dužine L=400 mm i klizač koji dodiruje žicu u jednoj tački, kojim se uravnotežava most. Na žici se nalazi skala x sa koje se očitava dužina od početka žice do tačke dodira sa klizačem. Greška očitavanja dužine sa skale je ±0.2 mm. Odrediti otpornost R_0 koju treba vezati sa svake strane žice da bi sigurne granice greške merenja R_X, usled netačnog očitavanja, bile ne veće od 1 %. Ukupna otpornost žice je 10 Ω. Unutrašnja otpornost indikatora N se može zanemariti, kao i tolerancije otpornika R_1 i R_0.

Rešenje:

Uvedimo podužnu otpornost žice kao količnik otpornosti žice i dužine L.

$$R_Z{}' = R_Z / L$$



Deo otpornosti potenciometra levo do klizača R_L i desno od klizača R_D se onda mogu izraziti:

$$R_L = x \cdot R_Z{}'$$

$$R_D = (L - x) \cdot R_Z{}'.$$

U momentu ravnoteže mosta važi jednakost proizvoda otpornosti naspramnih grana.

$$R_1 \cdot (R_D + R_0) = R_X \cdot (R_L + R_0)$$

$$R_1 \cdot \left[(L - x) \cdot R_Z{}' + R_0\right] = R_X \cdot (x \cdot R_Z{}' + R_0)$$

Tada izraz za određivanje nepoznate otpornosti dobija oblik:

$$R_X = \frac{R_1 \cdot \left[(L - x) \cdot R_Z{}' + R_0\right]}{x \cdot R_Z{}' + R_0}.$$

Izraz za sigurne granice greške se dobija polazeći od izraza za totalni izvod. Ovde nas zanima samo greška koja potiče usled netačnog očitavanja položaja klizača, pa ćemo vršiti diferenciranje samo po veličini x.

$$\Delta R_X = \frac{\partial R_X}{\partial x} \Delta x = R_1 \frac{-R_Z{}' \cdot \left[x \cdot R_Z{}' + R_0\right] - \left[(L - x) \cdot R_Z{}' + R_0\right] \cdot R_Z{}'}{\left[x \cdot R_Z{}' + R_0\right]^2} \Delta x$$

$$\Delta R_X = R_1 \frac{-R_Z{}' \cdot x \cdot R_Z{}' - R_Z{}' \cdot R_0 - L \cdot R_Z{}' \cdot R_Z{}' + x \cdot R_Z{}' \cdot R_Z{}' - R_0 \cdot R_Z{}'}{\left[x \cdot R_Z{}' + R_0\right]^2} \Delta x$$

$$\Delta R_X = R_1 \frac{-R_Z' \cdot R_0 - L \cdot R_Z' \cdot R_Z' - R_0 \cdot R_Z'}{\left[x \cdot R_Z' + R_0\right]^2} \Delta x = R_1 \frac{-2 \cdot R_Z' \cdot R_0 - L \cdot R_Z' \cdot R_Z'}{\left[x \cdot R_Z' + R_0\right]^2} \Delta x .$$

Ako pređemo na apsolutne vrednosti i napravimo izraz za relativne granice greške, imaćemo:

$$\frac{\Delta R_X}{R_X} = \frac{x \cdot R_Z' + R_0}{R_1 \cdot \left[(L-x) \cdot R_Z' + R_0\right]} R_1 \frac{-2 \cdot R_Z' \cdot R_0 - L \cdot R_Z' \cdot R_Z'}{\left[x \cdot R_Z' + R_0\right]^2} \Delta x$$

$$\left|\frac{\Delta R_X}{R_X}\right| \le \left|\frac{2 \cdot R_Z' \cdot R_0 + L \cdot R_Z' \cdot R_Z'}{\left[x \cdot R_Z' + R_0\right]\left[(L-x) \cdot R_Z' + R_0\right]}\right| |\Delta x|$$

Problem je što relativno iskazane granice greške zavise od položaja klizača *x*. Treba pronaći za koji položaj klizača je greška najveća, pa odrediti vrednost R_0 tako da i najveća greška ne bude veća od definisane vrednosti u tekstu zadatka.

Otpornost R_0 se dodaje da bi se ograničila greška merenja koja se dobija kad je klizač pri kraju potenciometra. Iz ovoga se može zaključiti da se najveća greška dobija pri $x=0$ i $x=L$. Egzaktan matematički pristup rešavanju zadatka bi zahtevao analizu funkcije u zavisnosti od vrednosti *x* i dalje rešavanje za ono *x* koje daje najveću relativnu grešku.

$$\left|\frac{\Delta R_X}{R_X}\right|_{\max, x=0 \; ili \; x=L} \le \left|\frac{2 \cdot R_Z' \cdot R_0 + L \cdot R_Z' \cdot R_Z'}{R_0\left[L \cdot R_Z' + R_0\right]}\right| |\Delta x| = \left|\frac{2 \cdot R_Z' \cdot R_0 + R_Z \cdot R_Z'}{R_0\left[R_Z + R_0\right]}\right| |\Delta x|$$

$$\left|\frac{\Delta R_X}{R_X}\right|_{\max, x=0 \; ili \; x=L} \le \left|\frac{R_Z' \cdot \left[2 \cdot R_0 + R_Z\right]}{R_0\left[R_Z + R_0\right]}\right| |\Delta x|$$

Izjednačimo desnu strani izraza sa greškom koja je data tekstom zadatka 1 %=1/100.

$$\left|\frac{R_Z' \cdot \left[2 \cdot R_0 + R_Z\right]}{R_0\left[R_Z + R_0\right]}\right| |\Delta x| = \frac{1}{100}$$

$$100 \cdot \left[\frac{R_Z}{L} \cdot \left[2 \cdot R_0 + R_Z\right]\right] |\Delta x| = R_0\left[R_Z + R_0\right]$$

$$100 \cdot R_Z \cdot \left[2 \cdot R_0 + R_Z\right] \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 0.4 \cdot R_0\left[R_Z + R_0\right]$$

$$R_Z \cdot \left[2 \cdot R_0 + R_Z\right] = 20 \cdot R_0\left[R_Z + R_0\right]$$

$$R_0\left(2 \cdot R_Z\right) + R_Z \cdot R_Z = R_0\left(20 \cdot R_Z\right) + 20 \cdot R_0^2$$

$$20 \cdot R_0^2 + 18 \cdot R_Z \cdot R_0 - R_Z^2 = 0$$

$$20 \cdot R_0^2 + 180 \cdot R_0 - 100 = 0$$

$$R_{0_{1,2}} = \frac{-180 \pm \sqrt{180^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-100)}}{2 \cdot 20} = 0.52\ \Omega$$

Negativno rešenje se odbacuje kao besmisleno.

29. Kapacitivnost kondenzatora *C* se meri UI metodom, strujnim spojem. Ampermetar ima unutrašnju otpornost koja je N=7 puta manja od impedanse kondenzatora *C*, a voltmetar ima unutrašnju otpornost N puta veću od impedanse kondenzatora *C*. Odrediti vrednost sistematske greške merenja koja nastaje usled konačnih otpornosti instrumenata. Koristi se izvor prostoperiodičnog napona amplitude 12 V, frekvencije 60 Hz.

Rešenje:

Kod merenja UI metodom, strujnim spojem, sistematska greška nastaje zbog konačne otpornosti ampermetra, zbog čega voltmetar meri napon na rednoj vezi ampermetra i kondenzatora. Deljenjem očitanih vrednosti na voltmetru i ampermentru se dobija merena vrednost koja predstavlja moduo redne veze unutrašnje otpornosti ampermetra i impedanse kondenzatora.

$$X_{mer} = \frac{1}{\omega \cdot C_{mer}} = \frac{U}{I} = \left| R_A + \frac{1}{j\omega \cdot C_{tac}} \right| = \left| \frac{j\omega \cdot C_{tac} \cdot R_A + 1}{j\omega \cdot C_{tac}} \right| = \frac{\sqrt{1 + (\omega \cdot C_{tac} \cdot R_A)^2}}{\omega \cdot C_{tac}}$$

$$\frac{C_{mer}}{C_{tac}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot C_{tac} \cdot R_A)^2}}$$

$$\Gamma_{\%} = \frac{C_{mer} - C_{tac}}{C_{tac}} \cdot 100 = \left(\frac{C_{mer}}{C_{tac}} - 1 \right) \cdot 100$$

$$\Gamma_{\%} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot C_{tac} \cdot R_A)^2}} - 1 \right) \cdot 100$$

Po tekstu zadatka imamo da je otpornost ampermetra sedam puta manja od impedanse kondenzatora.

$$R_A = \frac{1}{7} \frac{1}{\omega \cdot C_{tac}} \quad \Rightarrow \quad R_A \cdot \omega \cdot C_{tac} = \frac{1}{7}$$

$$\Gamma_{\%} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (1/7)^2}} - 1 \right) \cdot 100$$

$$\Gamma_{\%} = -1.01\,\%$$

30. Moduo impedanse monofaznog potrošača sa faktorom snage 0.5 izmeren je UI metodom, naponskim spojem, pri čemu su instrumenti pokazali 10 V i 10 mA. Odrediti apsolutnu grešku merenja vrednosti modula impedanse ako se zanemari unutrašnja otpornost voltmetra R_V=4 kΩ.

Rešenje:

Kod UI metode, naponski spoj, greška nastaje usled konačne otpornosti voltmetra, zbog čega ampermetar meri struju kroz paralelnu vezu unutrašnje otpornosti voltmetra i impedanse. Količnik očitanih pokazivanja voltmetra i ampermetra predstavlja moduo paralelne veze unutrašnje otpornosti voltmetra i merene impedanse.

$$\frac{U}{I} = |R_V \| \underline{Z}| = \left| \frac{R_V \cdot \underline{Z}}{R_V + \underline{Z}} \right| = \frac{R_V \cdot Z}{|R_V + \underline{Z}|} = \frac{R_V \cdot Z}{|R_V + Z \cdot \cos\varphi + j \cdot Z \cdot \sin\varphi|} = \frac{R_V \cdot Z}{\sqrt{(R_V + Z \cdot \cos\varphi)^2 + (Z \cdot \sin\varphi)^2}}$$

$$\frac{U}{I} = Z_{mer} = \frac{R_V \cdot Z}{\sqrt{R_V{}^2 + 2 \cdot R_V \cdot Z \cdot \cos\varphi + Z^2 \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}} = \frac{R_V \cdot Z}{\sqrt{R_V{}^2 + 2 \cdot R_V \cdot Z \cdot \cos\varphi + Z^2}}$$

Ako prethodni izraz kvadriramo i sredimo dobijamo izraz:

$$\left(R_V{}^2 + 2 \cdot R_V \cdot Z \cdot \cos\varphi + Z^2 \right) \cdot \left(\frac{U}{I} \right)^2 = R_V{}^2 \cdot Z^2$$

$$\left(16 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^3 Z + Z^2 \right) \cdot 10^6 = 16 \cdot 10^6 \cdot Z^2$$

$$16 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^3 Z + Z^2 = 16 \cdot Z^2$$

$$15\cdot Z^2+Z(-4\cdot 10^3)-16\cdot 10^6=0$$

$$Z_{1,2}=\frac{4\cdot 10^3\pm\sqrt{16\cdot 10^6+4\cdot 15\cdot 16\cdot 10^6}}{2\cdot 15}=\frac{4\cdot 10^3\pm 4\cdot 10^3\sqrt{1+60}}{30}=\frac{4\cdot 10^3}{30}\left(1\pm 7.810\right)=1.175\ \mathrm{k\Omega}$$

$$Z_{mer}=\frac{U}{I}=1\ \mathrm{k\Omega}$$

$$\Gamma=Z_{mer}-Z_{tac}=1\ \mathrm{k\Omega}-1.175\ \mathrm{k\Omega}$$

$$\Gamma=-175\ \Omega$$

31. Metodom tri voltmetra izmerena je aktivna snaga induktivnog potrošača čiji je faktor snage poznat i iznosi 0.4. Odrediti sistematsku grešku merenja ako voltmetar kojim se meri napon paralelno potrošaču nije idealan, već ima unutrašnju otpornost 45 puta veću od modula impedanse potrošača. Ostala dva voltmetra smatrati idealnim. Ulazni napon je mrežni - 230 V, 50 Hz.

Rešenje:

Ovde se spominje metoda tri voltmetra, kao jedna od metoda za merenje snage potrošača. Nisu data pokazivanja voltmetara, nego je samo rečeno da problem nastaje zbog konačne otpornosti voltmetra koji je paralelno vezan samoj impedansi. Problem će biti rešavan razmatranjem koja snaga se dobija (merena vrednost snage P_{mer}) u odnosu na snagu koja nas interesuje P_{tac}. Merena vrednost snage je algebarski zbir snage koja nas interesuje (P_{tac}) i snage koja se javlja na unutrašnjoj otpornosti voltmetra.

$$P_{mer}=P_{tac}+P_V,\quad P_V=\frac{U^2}{R_V},\quad P_{tac}=U\cdot I\cdot\cos\varphi=U\cdot\frac{U}{Z}\cdot\cos\varphi\quad\Rightarrow\quad P_{tac}=\frac{U^2}{Z}\cdot\cos\varphi$$

$$P_{mer}=\frac{U^2}{Z}\cdot\cos\varphi+\frac{U^2}{R_V}=U^2\left(\frac{\cos\varphi}{Z}+\frac{1}{R_V}\right)=U^2\left(\frac{\cos\varphi}{Z}+\frac{1}{45\cdot Z}\right)$$

$$\Gamma_{\%}=\left(\frac{P_{mer}}{P_{tac}}-1\right)\cdot 100=\left(\frac{U^2\left(\frac{\cos\varphi}{Z}+\frac{1}{45\cdot Z}\right)}{U^2\left(\frac{\cos\varphi}{Z}\right)}-1\right)\cdot 100=\left(\frac{U^2\left(\frac{\cos\varphi}{Z}+\frac{1}{45\cdot Z}-\frac{\cos\varphi}{Z}\right)}{U^2\left(\frac{\cos\varphi}{Z}\right)}\right)\cdot 100$$

$$\Gamma_{\%}=\left(\frac{U^2\left(\frac{1}{45\cdot Z}\right)}{U^2\left(\frac{\cos\varphi}{Z}\right)}\right)\cdot 100=\frac{100}{45\cdot\cos\varphi}$$

$$\Gamma_{\%}=5.55\ \%$$

32. Odrediti grešku merenja kapacitivnosti elektrolitskog kondenzatora UI metodom, ako se ne vodi računa da je umesto čisto sinusnog napona amplitude A_1 korišten napon oblika $u(t)=A_1\sin(\omega_1 t)+A_2\sin(\omega_2 t)$. Ampermetar i voltmetar su sa mekim gvožđem. A_1=6 V, A_2 iznosi 15 % od A_1, $\omega_2=3\omega_1$, f_1=60 Hz.

Rešenje:

Imamo složenoperiodični napon kao pobudu: napon se sastoji od osnovnog harmonika učestanosti ω_1 i trećeg harmonika (na učestanosti tri puta većoj od osnovne $\omega_2=3\omega_1$). Sistematska greška nastaje ako pokazivanja instrumenata tumačimo kao efektivnu vrednost prostoperiodičnog napona i struje, pri tome koristeći formulu koja važi samo u prostoperiodiočnom režimu na učestanosti ω_1.

$$X_{Cmer} = \frac{1}{\omega_1 \cdot C_{mer}} = \frac{U_{ef}}{I_{ef}}$$

Najopštija formula koja povezuje napon i struju na kondenzatoru je diferencijalni izraz.

$$i_C(t) = C_{tac}\frac{du_C(t)}{dt}$$

Pošto je poznat napon na krajevima kondenzatora, možemo odrediti vremenski oblik struje kroz kondenzator.

$$i_C(t) = C_{tac}\frac{d}{dt}\{A_1\sin(\omega_1 t) + 0.15A_1\sin(3\omega_1 t)\}$$

$$i_C(t) = C_{tac}\{A_1 \cdot \omega_1\cos(\omega_1 t) + 0.15 \cdot A_1 \cdot 3 \cdot \omega_1\cos(3\omega_1 t)\}$$

$$i_C(t) = C_{tac} \cdot A_1 \cdot \omega_1\{\cos(\omega_1 t) + 0.45\cos(3\omega_1 t)\}$$

Oba instrumenta su sa mekim gvožđem, što znači da mere efektivnu vrednost. Potrebno je odrediti efektivnu vrednost napona i efektivnu vrednost struje, na osnovu vremenskih zavisnosti.

Ovde se može računati efektivna vrednost po definiciji, ali je mnogo lakše koristiti formulu koja se odnosi na složenoperiodične talasne oblike: efektivna vrednost složenoperiodičnog talasnog oblika je jednaka kvadratnom korenu iz sume kvadrata efektivnih vrednosti harmonika.

$$U_{ef} = \sqrt{(U_{1ef})^2 + (U_{3ef})^2} = \sqrt{\left(\frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{A_3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.15A_1}{\sqrt{2}}\right)^2} = A_1\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.15}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$U_{ef} = A_1 \cdot 0.715$$

$$I_{ef} = \sqrt{(I_{1ef})^2 + (I_{3ef})^2} = \sqrt{\left(\frac{C_{tac} \cdot A_1 \cdot \omega_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.45 \cdot C_{tac} \cdot A_1 \cdot \omega_1}{\sqrt{2}}\right)^2} = C_{tac} \cdot A_1 \cdot \omega_1\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.45}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_{ef} = C_{tac} \cdot A_1 \cdot \omega_1 \cdot 0.775$$

Pošto smo vodili računa o harmonicima, sada možemo da napišemo ispravan izraz za količnik očitanih vrednosti napona i struje.

$$\frac{U_{ef}}{I_{ef}} = \frac{A_1 \cdot 0.715}{C_{tac} \cdot A_1 \cdot \omega_1 \cdot 0.775} = \frac{1}{C_{tac} \cdot \omega_1 \cdot 1.084}$$

$$\frac{1}{C_{tac} \cdot \omega_1 \cdot 1.084} = \frac{1}{\omega_1 \cdot C_{mer}} \quad \Rightarrow \quad \frac{C_{mer}}{C_{tac}} = 1.084$$

Sada možemo napisati izraz za relativnu grešku merenja.

$$\Gamma_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{C_{mer}}{C_{tac}} - 1\right)$$

$$\Gamma_{\%} = 100 \cdot (1.084 - 1) = 8.4\ \%$$

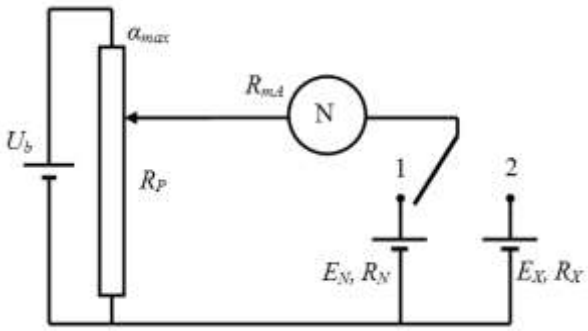
33. Kompenzator prikazan na slici je uravnotežen za napon E_N pri položaju klizača α_N=400 podeoka, dok je za nepoznatu EMS ravnoteža postignuta pri α_X=200 podeoka. Potenciometar ima α_{max}=500 podeoka (kada je klizač u skroz gornjem položaju). Kada se

klizač, u položaju prekidača (2), postavi na α_2=210 podeoka, kroz indikator nule protiče struja 3 mA. Kolika je unutrašnja otpornost izvora E_X? U_b je idealan naponski izvor. R_N=15 Ω, R_P=100 Ω, E_N=10 V, R_{mA}=15 Ω.

Rešenje:

Osnovna namena kompenzatora je za određivanje elektromotorne sile.

Podešavanjem klizača potenciometra se obezbeđuje da kroz kolo ne teče struja (kada indikator nule pokazuje nulu), pa se izbegava uticaj unutrašnje otpornosti izvora.



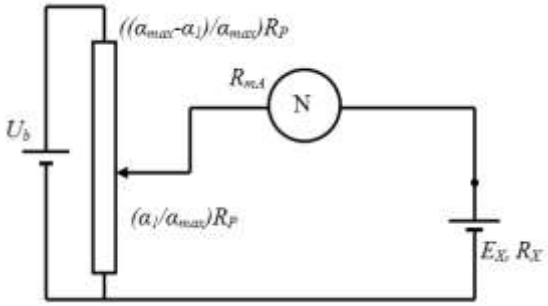
Važi proporcionalnost elektromotornih sila i položaja klizača pri uravnoteženom kompenzatoru.

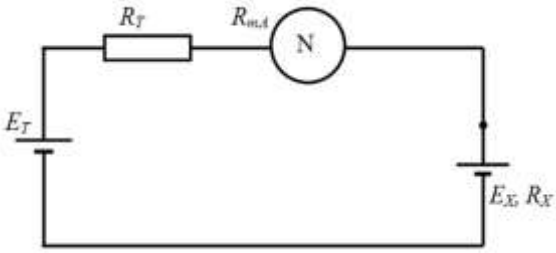
$$\frac{E_N}{E_X}=\frac{\alpha_N}{\alpha_X} \quad \Rightarrow \quad E_X=E_N\frac{\alpha_X}{\alpha_N}=10\text{ V}\frac{200\text{ pod}}{400\text{ pod}} \quad \Rightarrow \quad E_X=5\text{ V}$$

Možemo odrediti i napon pomoćne baterije.

$$U_b\frac{\alpha_N}{\alpha_{\max}}=E_N \quad \Rightarrow \quad U_b=E_N\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_N} \quad \Rightarrow \quad U_b=12.5\text{ V}$$

U ovom zadatku je data jedna dodatna mogućnost, a to je određivanje unutrašnje otpornosti izvora. Kompenzator se namerno razdesi, pusti se da kroz kolo teče struja, koja se meri indikatorom nule. Zbog proticanja struje sada se javlja pad napona na unutrašnjoj otpornosti. U ovom drugom slučaju šema izgleda kao na slici. Na drugoj slici je data ekvivalentna šema.





Elementi ekvivalentne šeme se izračunavaju po sledećim formulama.

$$E_T=\frac{(\alpha_2/\alpha_{\max})R_P}{R_P}U_b=(\alpha_2/\alpha_{\max})\cdot U_b=\frac{210\text{ pod}}{500\text{ pod}}12.5\text{ V} \quad \Rightarrow \quad E_T=5.25\text{ V}$$

$$R_T=\{(\alpha_2/\alpha_{\max})R_P\}\|\{((\alpha_{\max}-\alpha_2)/\alpha_{\max})R_P\}=\frac{210\cdot100}{500}\left\|\frac{290\cdot100}{500}=42\|58\right. \quad \Rightarrow \quad R_T=24.36\,\Omega$$

Sada je jednostavno napisati izraz za struju koja teče kroz kolo, a koju meri indikator nule.

$$I=\frac{E_T-E_X}{R_T+R_N+R_X}=3\text{ mA}$$

$$R_T+R_{mA}+R_X=\frac{E_T-E_X}{I}$$

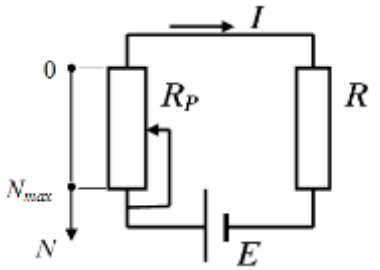
$$R_X=\frac{E_T-E_X}{I}-R_T-R_{mA}$$

$$R_X = \frac{5.25\ \text{V} - 5.00\ \text{V}}{3\ \text{mA}} - 24.36\ \Omega - 15\ \Omega$$

$$R_X = 44\ \Omega$$

34.

Promenljivim kliznim otpornikom podešava se struja u kolu sa slike, u opsegu (0.1–1.0) A, u koracima ne većim od 5 mA. Kolika mora biti dužina kliznog otpornika ako je po jednom centimetru njegove dužine namotano 10 zavojaka otporne žice?



Rešenje:

Struja u kolu je definisana izrazom, pri čemu je N broj aktivnih navojaka (onih kroz koje teče struja) u skladu sa položajem klizača u odnosu na osu.

$$I = \frac{E}{R + \frac{N}{N_{\max}} R_P}$$

Važne su nam najmanja i najveća vrednost struje.

$$I_{\min} = I\big|_{N=N_{\max}} = \frac{E}{R + \frac{N_{\max}}{N_{\max}} R_P} = \frac{E}{R + R_P} = 0.1\ \text{A}$$

$$I_{\max} = I\big|_{N=0} = \frac{E}{R + \frac{0}{N_{\max}} R_P} = \frac{E}{R} = 1.0\ \text{A}$$

Količnik ova dva izraza nam daje korisnu formulu.

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1.0\ \text{A}}{0.1\ \text{A}} = 10 = \frac{\frac{E}{R}}{\frac{E}{R + R_P}} = \frac{R + R_P}{R}$$

$$R + R_P = 10 \cdot R$$

$$R_P = 9 \cdot R$$

Nas interesuje kolika se promena struje dobija za minimalnu promenu broja N. Pošto N predstavlja broj zavojaka, reč je o prirodnom broju i najmanja promena je ΔN=1.

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial N} \Delta N = -\frac{E}{\left[R + \frac{N}{N_{\max}} R_P\right]^2} \frac{\partial}{\partial N}\left[R + \frac{N}{N_{\max}} R_P\right] \Delta N$$

$$\Delta I = -\frac{E}{\left[R + \frac{N}{N_{\max}} R_P\right]^2} \frac{R_P}{N_{\max}} \Delta N$$

$$\Delta I\big|_{\Delta N=1} = -\frac{E}{\left[R+\frac{N}{N_{\max}}R_P\right]^2}\frac{R_P}{N_{\max}}$$

Gornji izraz nam pokazuje da promena struje zavisi od položaja klizača, odnosno od aktivnog broja zavojaka. Najveća promena struje se dobija kad je N=0, i čak i u tom slučaju promena struje ne sme biti veća od zadate vrednosti od 5 mA.

$$\left|\Delta I\big|_{\Delta N=1,N=0}\right| = \frac{E}{\left[R+\frac{0}{N_{\max}}R_P\right]^2}\frac{R_P}{N_{\max}} = \frac{E}{R^2}\frac{R_P}{N_{\max}} \le 5\,\text{mA}$$

Izraz je napisan po apsolutnoj vrednosti. Znak minus ispred je označavao da sa porastom N dolazi do opadanja struje I.

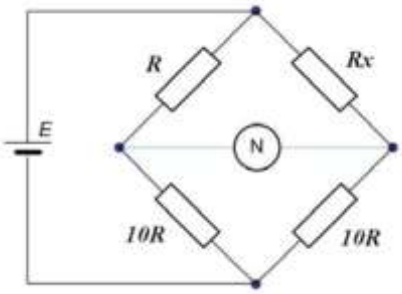
$$\left|\Delta I\big|_{\Delta N=1,N=0}\right| = \frac{E}{R}\frac{R_P}{R}\frac{1}{N_{\max}} = I_{\max}\cdot 9\cdot\frac{1}{N_{\max}} \le 5\,\text{mA}$$

$$N_{\max} = \frac{I_{\max}\cdot 9}{5\,\text{mA}} = 1800$$

Pošto na jedan centimetar može da se namota 10 zavojaka, sledi da je za 1800 zavojaka potrebna dužina potenciometra od 180 cm.

35.

Otpornost Rx se meri Vitstonovim mostom prikazanim na slici. Kolika je osetljivost u blizini ravnotežnog stanja? Most je napajan iz idealnog naponskog izvora E=10 V. R=1 kΩ, a unutrašnja otpornost indikatora nule je R_N=120 Ω.



Rešenje:

Primenom Tevenenove teoreme za deo mosta iz kojeg je izuzet indikator nule, dobijaju se ekvivalentni elementi E_T i R_T.

$$E_T = \frac{10R}{R+10R}E - \frac{10R}{R_X+10R}E$$

Most je u ravnoteži kada je R_X=R. Kada je most razdešen, obeležićemo vrednost merene otpornosti R_X=R+ΔR.

$$E_T = \frac{10R}{R+10R}E - \frac{10R}{R+\Delta R+10R}E = \frac{10R\cdot(11R+\Delta R)-10R\cdot(11R)}{11R\cdot(11R+\Delta R)}E = \frac{10R\cdot\Delta R}{11R\cdot(11R+\Delta R)}E$$

U sumi se može zanemariti priraštaj otpornosti ΔR u odnosu na vrednost R, pa se dobija vrlo približan izraz.

$$E_T = \frac{10R\cdot\Delta R}{11R\cdot(11R+\Delta R)}E \approx \frac{10\cdot\Delta R}{121R}E$$

Tevenenovu otpornost određujemo kada isključimo nezavisan naposnki izvor (zamenimo ga kratkim spojem). Tada dva leva otpornika čine jednu paralelnu vezu, a donja desna otpornika drugu paralelnu vezu. Ove dve grupe su redno vezane.

$$R_T = [R \| (10R)] + [R_X \| (10R)]$$

$$R_T = [R \| (10R)] + [(R + \Delta R) \| (10R)]$$

$$R_T \approx [R \| (10R)] + [R \| (10R)] = 2\frac{R \cdot 10R}{R + 10R} = \frac{20}{11}R$$

Izraz za struju kroz indikator nule je definisan izrazom.

$$I_N = \frac{E_T}{R_T + R_N} = \frac{\frac{10 \cdot \Delta R}{121R}E}{\frac{20}{11}R + R_N}$$

$$\frac{I_N}{\Delta R} = \frac{\frac{10}{121R}E}{\frac{20}{11}R + R_N} = \frac{\frac{10}{121 \cdot 1\,\mathrm{k\Omega}}10\,\mathrm{V}}{\frac{20}{11} \cdot 1\,\mathrm{k\Omega} + \cdot 120\,\Omega} = 426\,\frac{\mathrm{nA}}{\Omega}$$

36. Za merenje jednosmerene struje na raspolaganju je milivoltmetar unutrašnje otpornosti od 1.5 Ω, i šant za 12 A i 60 mV. Kolika procentualna sistematska greška merenja nastaje ako se zanemari činjenica da unutrašnja otpornost milivoltmetra nije neograničeno velika?

Rešenje:

Ukoliko ne vodimo računa o konačnoj unutrašnjoj otpornosti primenjenog mV-metra, struju možemo izraziti na osnovu poznavanja otpora šanta R_s i očitanog napona U_{mV}. To neće biti tačna vrednost struje (biće merena vrednost struje), jer sadrži grešku usled zanemarivnja otpornosti mV-metra.

$$I_{mer} = \frac{U_{mV}}{R_s}$$

Otpornost šanta je data na osnovu struje za koju je napravljen i napona koji pri toj struji daje.

$$R_s = \frac{U}{I} = \frac{60\,\mathrm{mV}}{12\,\mathrm{A}} = 5\,\mathrm{m\Omega}$$

Da bismo dobili tačnu vrednost struje, potrebno je uzeti u obzir konačnu otpornost mV-metra. Stuja koju merimo protiče kroz paralelnu vezu otpornosti šanta i otpornosti mV-metra, pa je izraz za tačnu vrednost struje dat izrazom:

$$I_{tac} = \frac{U_{mV}}{R_s \| R_{mV}} = \frac{U_{mV}}{\frac{R_s \cdot R_{mV}}{R_s + R_{mV}}}.$$

Relativna greška je data izrazom:

$$\Gamma_{\%} = 100 \cdot \left[\frac{I_{mer}}{I_{tac}} - 1\right] = 100 \cdot \left[\frac{\frac{U_{mV}}{R_s}}{\frac{U_{mV}}{\frac{R_s \cdot R_{mV}}{R_s + R_{mV}}}} - 1\right] = 100 \cdot \left[\frac{\frac{U_{mV}}{R_s}}{\frac{U_{mV}(R_s + R_{mV})}{R_s \cdot R_{mV}}} - 1\right] = 100 \cdot \left[\frac{R_{mV}}{R_s + R_{mV}} - 1\right]$$

$$\Gamma_{\%} = 100 \cdot \left[\frac{1.5\,\Omega}{1.5\,\Omega + 5\,\text{m}\Omega} - 1 \right] = -0.33\,\%$$

37. Za merenje impedanse upotrebljeni su ampermetar, voltmetar i vatmetar (voltmetar i naponsko kolo vatmetra priključeni na krajeve merene impedanse). Njihova pokazivanja su 50 mA, 10 V i 0.4 W. Odrediti sistematsku grešku merenja modula impedanse, ako se zanemari činjenica da otpornost naponskog kola vatmetra i otpornost voltmetra nisu neograničeno velike već iznose po 3 kΩ, svaka.

Rešenje:

Ako zanemarimo unutrašnje otpornosti instrumenata, onda je količnik napona i struje jednak modulu impedanse. Zbog zanemarivanja, ovo neće biti tačna, nego će biti merena vrednost.

$$Z_{mer} = \frac{U}{I} = \frac{10\text{ V}}{50\text{ mA}} = 200\,\Omega$$

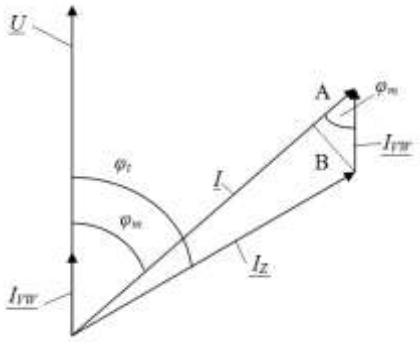
Količnik napona i struje će biti moduo impedanse koju predstavljaju paralelna veza: a) unutrašnje otpornosti voltmetra, b) otpornosti naponskih krajeva vatmetra i c) impedanse.

$$\frac{U}{I} = \left| \left(R_V \| R_W \right) \| \underline{Z}_{tac} \right| = \left| \left(R_{VW} \| \underline{Z}_{tac} \right) \right|, \quad R_{VW} = R_V \| R_W = 1.5\text{ k}\Omega$$

Da bismo odredili tačnu vrednost modula impedanse, potrebno je napraviti količnik napona na krajevima impedanse i struje koja teče kroz impedansu. Ovde nastaje sistematska greška, pošto ampermetar ne meri struju kroz impedansu, nego meri struju kroz paralelnu vezu.

$$Z_{tac} = \frac{U_Z}{I_Z} = \frac{U}{I_Z}$$

$$\underline{I} = \underline{I_Z} + \underline{I_{VW}}$$



Na osnovu aktivne snage P, napona U i struje I, se može odrediti faktor snage paralelne veze.

$$\cos\varphi_m = \frac{P}{U \cdot I}$$

$$\varphi_m = \arccos\left(\frac{P}{U \cdot I} \right) = 36.87^o$$

Struja I_{VW} je u fazi sa naponom U. Vrednost ove struje možemo odrediti na osnovu poznavanja napona U i otpornosti R_{VW}.

$$I_{VW} = \frac{U}{R_{VW}} = \frac{10\text{ V}}{1.5\text{ k}\Omega} = 6.67\text{ mA}$$

Za trougao, čije stranice čine struje na fazorskom dijagramu, se može napisati izraz po kosinusnoj teoremi, korišćenjem poznatog ugla φ_m. Drugi način je da se napiše Pitagorina teorema za "veći" pravougli trougao.

$$(I - A)^2 + B^2 = I_Z{}^2$$

Pomoćne vrednosti A i B se mogu odrediti iz "manjeg" pravouglog trougla, preko dužine I_{VW} i ugla φ_m.

$$A = \cos\varphi_m \cdot I_{VW}, \qquad B = \sin\varphi_m \cdot I_{VW}$$

$$(I - \cos\varphi_m \cdot I_{VW})^2 + (\sin\varphi_m \cdot I_{VW})^2 = I_Z{}^2$$

$$I^2 - 2 \cdot I \cdot I_{VW} \cdot \cos\varphi_m + \cos^2\varphi_m \cdot I_{VW}{}^2 + \sin^2\varphi_m \cdot I_{VW}{}^2 = I_Z{}^2$$

$$I^2 - 2\cdot I\cdot I_{VW}\cdot\cos\varphi_m + I_{VW}{}^2\cdot\left(\cos^2\varphi_m + \sin^2\varphi_m\right) = I_Z{}^2$$

$$I^2 - 2\cdot I\cdot I_{VW}\cdot\cos\varphi_m + I_{VW}{}^2 = I_Z{}^2$$

$$I_Z = \sqrt{I^2 - 2\cdot I\cdot I_{VW}\cdot\cos\varphi_m + I_{VW}{}^2} = \sqrt{0.05^2 - 2\cdot 0.05\cdot 0.0067\cdot\frac{0.4}{10\cdot 0.05} + 0.0067^2} = 44.85\,\text{mA}$$

$$Z_{tac} = \frac{U}{I_Z} = \frac{10\,\text{V}}{44.85\,\text{mA}} = 223\,\Omega$$

Relativno iskazana sistematska greška se računa po izrazu:

$$\Gamma_{\%} = 100\cdot\left(\frac{Z_{mer}}{Z_{tac}} - 1\right) = 100\cdot\left(\frac{200\,\Omega}{223\,\Omega} - 1\right) = -10.3\,\%$$

38. Aktivna snaga potrošača meri se metodom tri voltmetra. Kolike su procentualne sigurne granice greške merenja ako su pokazivanja voltmetara 15 V, 10 V i 10 V a procentualne sigurne granice greške merenih napona i dodatnog otpornika su jednake i iznose 0.5 %.

Rešenje:

Polazimo od izraza po kojem se računa indirektno određena veličina (u ovom slučaju: aktivna snaga) na osnovu merenih veličina (ovde su to tri napona). Potom treba diferencirati ovaj izraz po svakoj veličini čija greška se postiže.

$$P = \frac{U_1{}^2 - U_0{}^2 - U^2}{2\cdot R}$$

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial U_1}\Delta U_1 + \frac{\partial P}{\partial U_0}\Delta U_0 + \frac{\partial P}{\partial U}\Delta U + \frac{\partial P}{\partial R}\Delta R$$

$$\Delta P = \left[\frac{2\cdot U_1}{2\cdot R}\right]\Delta U_1 + \left[\frac{-2\cdot U_0}{2\cdot R}\right]\Delta U_0 + \left[\frac{-2\cdot U}{2\cdot R}\right]\Delta U + \frac{U_1{}^2 - U_0{}^2 - U^2}{-2\cdot R^2}\Delta R$$

$$|\Delta P| \le \left|\frac{U_1}{R}\Delta U_1\right| + \left|\frac{-U_0}{R}\Delta U_0\right| + \left|\frac{-U}{R}\Delta U\right| + \left|\frac{U_1{}^2 - U_0{}^2 - U^2}{-2\cdot R^2}\Delta R\right|$$

$$\left|\frac{\Delta P}{P}\right| \le \frac{2R}{U_1{}^2 - U_0{}^2 - U^2}\left\{\left|\frac{U_1}{R}\Delta U_1\right| + \left|\frac{-U_0}{R}\Delta U_0\right| + \left|\frac{-U}{R}\Delta U\right| + \left|\frac{U_1{}^2 - U_0{}^2 - U^2}{-2\cdot R^2}\Delta R\right|\right\}$$

$$\left|\frac{\Delta P}{P}\right| \le \frac{2}{U_1{}^2 - U_0{}^2 - U^2}\left\{U_1\cdot\Delta U_1 + U_0\cdot\Delta U_0 + U\cdot\Delta U + \frac{U_1{}^2 - U_0{}^2 - U^2}{2}\frac{\Delta R}{R}\right\}$$

$$\left|\frac{\Delta P}{P}\right| \le \frac{2}{U_1{}^2 - U_0{}^2 - U^2}\left\{U_1{}^2\cdot\frac{\Delta U_1}{U_1} + U_0{}^2\cdot\frac{\Delta U_0}{U_0} + U^2\cdot\frac{\Delta U}{U}\right\} + \frac{\Delta R}{R}$$

$$\left|\frac{\Delta P}{P}\right|_{\%} \le \frac{2}{U_1{}^2 - U_0{}^2 - U^2}\left\{U_1{}^2\cdot\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right)_{\%} + U_0{}^2\cdot\left(\frac{\Delta U_0}{U_0}\right)_{\%} + U^2\cdot\left(\frac{\Delta U}{U}\right)_{\%}\right\} + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\%}$$

Relativne greške merenja sva tri napona i za dodatnu otpornost u zadatku iznose 0.5 %.

$$\left|\frac{\Delta P}{P}\right|_{\%} \le \frac{2}{15^2 - 10^2 - 10^2}\left\{15^2\cdot 0.5\,\% + 10^2\cdot 0.5\,\% + 10^2\cdot 0.5\,\%\right\} + 0.5\,\%$$

$$\left|\frac{\Delta P}{P}\right|_{\%} \leq 17.5\,\%$$

39. Za merenje struje na raspolaganju je milivoltmetar dometa 60 mV, klase tačnosti 1.0 i unutrašnje otpornosti od (6±0.03) Ω, i šant za 60 A i 60 mV, klase tačnosti 0.5. Kolike su sigurne granice greške merenja struje od približno 20 A?

Rešenje:
Milivoltmetar meri napon na paralelnoj vezi otpornosti šanta i sopstvene unutrašnje otpornosti.

$$U_{mV} = I \cdot \left(R_s \| R_{mV}\right) = I \cdot \frac{R_s \cdot R_{mV}}{R_s + R_{mV}}$$

$$I = U_{mV} \cdot \frac{R_s + R_{mV}}{R_s \cdot R_{mV}}$$

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial U_{mV}} \Delta U_{mV} + \frac{\partial I}{\partial R_s} \Delta R_s + \frac{\partial I}{\partial R_{mV}} \Delta R_{mV}$$

$$\Delta I = \frac{R_s + R_{mV}}{R_s \cdot R_{mV}} \Delta U_{mV} + U_{mV} \frac{1 \cdot R_s \cdot R_{mV} - \left(R_s + R_{mV}\right) R_{mV}}{\left(R_s \cdot R_{mV}\right)^2} \Delta R_s + U_{mV} \frac{1 \cdot R_s \cdot R_{mV} - \left(R_s + R_{mV}\right) R_s}{\left(R_s \cdot R_{mV}\right)^2} \Delta R_{mV}$$

$$\Delta I = \frac{R_s + R_{mV}}{R_s \cdot R_{mV}} \Delta U_{mV} + U_{mV} \frac{-R_{mV}^{\ 2}}{\left(R_s \cdot R_{mV}\right)^2} \Delta R_s + U_{mV} \frac{-R_s^{\ 2}}{\left(R_s \cdot R_{mV}\right)^2} \Delta R_{mV}$$

$$\left|\frac{\Delta I}{I}\right| \leq \frac{1}{I} \left\{ \left|\frac{R_s + R_{mV}}{R_s \cdot R_{mV}} \Delta U_{mV}\right| + \left|U_{mV} \frac{-R_{mV}^{\ 2}}{\left(R_s \cdot R_{mV}\right)^2} \Delta R_s\right| + \left|U_{mV} \frac{-R_s^{\ 2}}{\left(R_s \cdot R_{mV}\right)^2} \Delta R_{mV}\right| \right\}$$

$$\left|\frac{\Delta I}{I}\right| \leq \frac{1}{I} \left\{ \left|\frac{R_s + R_{mV}}{R_s \cdot R_{mV}} \Delta U_{mV}\right| + \left|\frac{U_{mV}}{R_s^{\ 2}} \Delta R_s\right| + \left|\frac{U_{mV}}{R_{mV}^{\ 2}} \Delta R_{mV}\right| \right\}$$

Napon koji pokazuje milivoltmetar pri struji od 20 A određujemo po izrazu:

$$U_{mV} = I \cdot \frac{R_s \cdot R_{mV}}{R_s + R_{mV}} = 20\ \text{A} \cdot \frac{6\,\Omega \cdot 1\,\text{m}\Omega}{6\,\Omega + 1\,\text{m}\Omega} = 19.997\ \text{mV} \approx 20\ \text{mV}$$

$$\left|\frac{\Delta I}{I}\right|_{\%} \leq \frac{100}{20\ \text{A}} \left\{ \left|\frac{1\,\text{m}\Omega + 6\,\Omega}{1\,\text{m}\Omega \cdot 6\,\Omega} \cdot 0.6\ \text{mV}\right| + \left|\frac{20\ \text{mV}}{\left(1\,\text{m}\Omega\right)^2} \cdot 0.5 \frac{1\,\text{m}\Omega}{100}\right| + \left|\frac{20\ \text{mV}}{\left(6\,\Omega\right)^2} \cdot 0.03\,\Omega\right| \right\}$$

$$\left|\frac{\Delta I}{I}\right|_{\%} \leq \frac{100}{20\ \text{A}} \left\{0.6001 + 0.1 + 0.00000166\right\}$$

$$\left|\frac{\Delta I}{I}\right|_{\%} \leq 3.5\,\%$$

40. Na voltmetar sa kretnim kalemom, opsega 20 V, i dvostranim ispravljačem, baždarenim da pokazuje amplitudu prostoperiodičnog napona, priključen je izvor napona pravougaonog talasnog oblika, periode 52.5 s, i unutrašnje otpornosti 3.0 kΩ. Izmerena je vrednost od 15 V.

Kolika je efektivna vrednost ulaznog signala? Voltmetar ima karakterističnu unutrašnju otpornost od 150 Ω/V.

Rešenje:
Ovde imamo vrlo "neobičan" instrument: a) baždaren je da pokazuje amplitudu (uglavnom su instrumenti baždareni da pokazuju efektivnu vrednost naizmeničnih signala), b) instrument (ali i izvor) ima unutrašnju otpornost, i c) na instrument se dovodi signal velike periode (vrlo male frekvencije).

Voltmetar sa kretnim kalemom i dvostranim ispravljačem koji je baždaren da pokazuje amplitudu prostoperiodičnog napona, radi tri stvari: i) dvostrano ispravlja prostoperiodični napon, ii) nalazi srednju vrednost dvostrano ispravljenog napona i iii) množi konstantom tako određenom da dobije pokazivanje jednako amplitudi.

$$U = K \cdot \frac{1}{T}\int_0^T |U_m \sin(\omega t)| dt = K \cdot \frac{2}{T}\int_0^{T/2} U_m \sin(\omega t) dt = K \cdot \frac{2}{T} \cdot \left(-\frac{U_m}{\omega}\right)\cos(\omega t)\Big|_0^{T/2}$$

$$= K \cdot \frac{2}{T} \cdot \left(-\frac{U_m}{2\pi/T}\right)\left[\cos(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}) - \cos 0\right] = \frac{2KU_m}{\pi} = U_m$$

$$K = \frac{\pi}{2}$$

Dakle, ovaj instrument množi srednju vrednost faktorom π/2 da bi otklon bio srazmeran amplitudi napona.

Sada se na ovaj instrument, umesto očekivanog prostoperiodičnog napona dovoljno velike frekvencije, dovodi pravougaoni napon, vrlo duge periode. Zbog dvostranog ispravljača, voltmetar će "videti" stalno pozitivan napon jednak amplitudi. Instrument skreće srazmerno trenutnoj vrednosti (ovde je to konstantna vrednost), ali još i množi konstantom π/2, te dobija pokazivanje od navedenih 15 V.

$$15\ \text{V} = \frac{\pi}{2}U \quad \Rightarrow \quad U = \frac{2 \cdot 15\ \text{V}}{\pi} = 9.55\ \text{V}$$

Ovde bi bio kraj zadatka, da nema komplikacije sa postojanjem unutrašnje otpornosti izvora i unutrašnje otpornosti instrumenta. U ovom posebnom slučaju, instrument meri napon koji je definisan otporničkim razdelnikom napona.

$$U_V = \frac{R_V}{R_V + R_{IZV}} U_{IZV} = \frac{(20\ \text{V} \cdot 150\ \Omega/\text{V})}{(20\ \text{V} \cdot 150\ \Omega/\text{V}) + 3\ \text{k}\Omega} U_{IZV} = \frac{1}{2} U_{IZV}$$

Zbog prisustva unutrašnje otpornosti instrumenta i izvora, dobijamo da voltmetar "vidi" upola manji napon. To znači da dobijeni rezultat, ono što smo odredili da je amplituda, ustvari treba pomnožiti sa 2. Konačno, amplituda pravougaonog napona iznosi 19.10 V. U zadatku se traži efektivna vrednost ulaznog napona. Za pravougaoni talasni oblik znamo da je efektivna vrednost jednaka maplitudi, pa efektivna vrednost iznosi 19.10 V.

41. Otpornost se meri UI metodom, naponskim spojem. Odrediti vrednost otpornosti i mernu nesigurnost, ako su upotrebljeni instrumenti:

- voltmetar opsega 6 V, klase tačnosti 1, koji ima unutrašnju otpornost (6000±12) Ω,
- ampermetar opsega 12 mA, klase tačnosti 1.

Očitane vrednosti su 10 mA i 6 V.

Rešenje:

Ukoliko bismo, po Omovom zakonu, napravili količnik očitanog napona i struje, napravili bismo sistematsku grešku usled zanemarivanja konačne otpornosti voltmetra.

$$\frac{U}{I} = 600\,\Omega$$

Prvo moramo otkloniti uticaj sistematske greške.

$$\frac{U}{I} = \frac{R_X \cdot R_V}{R_X + R_V} \quad \Rightarrow \quad R_X = \frac{R_V \cdot U}{R_V \cdot I - U} = 666.7\,\Omega$$

Da bismo odredili mernu nesigurnost, treba odrediti parcijalne izvode po uticajnim veličinama (koeficijente osetljivosti C_U, C_I, C_{Rv}). Ovde su to pokazivanja instrumenata U i I, i unutrašnja otpornost voltmetra R_V.

$$\frac{\partial R_X}{\partial U} = \frac{R_V \cdot (R_V \cdot I - U) - (R_V \cdot U)(-1)}{(R_V \cdot I - U)^2} = \frac{R_V{}^2 \cdot I}{(R_V \cdot I - U)^2} = C_U$$

$$\frac{\partial R_X}{\partial I} = -\frac{(R_V \cdot U) \cdot R_V}{(R_V \cdot I - U)^2} = -\frac{R_V{}^2 \cdot U}{(R_V \cdot I - U)^2} = C_I$$

$$\frac{\partial R_X}{\partial R_V} = \frac{U \cdot (R_V \cdot I - U) - (R_V \cdot U) \cdot I}{(R_V \cdot I - U)^2} = -\frac{U^2}{(R_V \cdot I - U)^2} = C_{R_V}$$

Za date vrednosti U, I i R_V, koeficijenti osetljivosti imaju sledeće vrednosti.

$$C_U = 123\,\frac{\Omega}{\mathrm{V}}, \quad C_I = -74.1\,\frac{\Omega}{\mathrm{mA}}, \quad C_{R_V} = -12.3\,\frac{\mathrm{m}\Omega}{\Omega}$$

Sada je potrebno odrediti standardne merne nesigurnosti izmerenih i saopštenih veličina. Pošto nemamo nikakve informacije o obliku raspodele grešaka, smatraćemo za sve tri veličine da je u pitanju uniformna raspodela.

$$u_U = \frac{\max|\Delta U|}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{kl_V}{100} \cdot U_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{100} \cdot 6\,\mathrm{V}}{\sqrt{3}} = 34.6\,\mathrm{mV}$$

$$u_I = \frac{\max|\Delta I|}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{kl_A}{100} \cdot I_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{100} \cdot 12\,\mathrm{mA}}{\sqrt{3}} = 69.3\,\mu\mathrm{A}$$

$$u_{R_V} = \frac{\max|\Delta R_V|}{\sqrt{3}} = \frac{12\,\Omega}{\sqrt{3}} = 6.93\,\Omega$$

Kombinovana merna nesigurnost je definisana izrazom:

$$u_{R_X} = \sqrt{[C_U \cdot u_U]^2 + [C_I \cdot u_I]^2 + [C_{R_V} \cdot u_{R_V}]^2}$$

$$u_{R_X} = \sqrt{\left[123\,\frac{\Omega}{\mathrm{V}} \cdot 34.6\,\mathrm{mV}\right]^2 + \left[-74.1\,\frac{\Omega}{\mathrm{mA}} \cdot 69.3\,\mu\mathrm{A}\right]^2 + \left[-12.3\,\frac{\mathrm{m}\Omega}{\Omega} \cdot 6.93\,\Omega\right]^2}$$

$$u_{R_X} = \sqrt{18.11\,\Omega^2 + 26.36\,\Omega^2 + 0.007\,\Omega^2} = 6.67\,\Omega$$

Procentualno iskazana kombinovana merna nesigurnost se dobija po sledećoj formuli.

$$u_{R_X\,\%} = \frac{u_{R_X}}{R_X} \cdot 100 = 1\,\%$$

42. Ulazna impedansa elektrodinamičkog voltmetra može da se predstavi rednom vezom otpornika od 5.0 kΩ i kalema induktivnosti 0.20 H. Voltmetar je, u jednosmernom režimu rada, podešen tako da na gornjoj granici mernog opsega greška merenja bude jednaka nuli. Kolika će biti greška merenja na gornjoj granici mernog opsega ako se meri naizmenični napon frekvencije 500 Hz?

Rešenje:
Elektrodinamički voltmetar skreće srazmerno kvadratu struje koja teče kroz njegove namotaje. U jednosmernom režimu nema uticaja induktivnosti, tako da je struja određena količnikom dovedenog napona i otpornosti voltmetra.

$$I = \frac{U}{R}, \quad \alpha = K \cdot I^2 = K \cdot \left(\frac{U}{R}\right)^2$$

U jednosmernom režimu je izvršeno podešavanje na gornjoj granici opsega: kada je je jednosmerni napon jednak opsegu, onda se dobija maksimalan otklon.

$$\alpha_{\max} = K \cdot \left(\frac{U_{\max}}{R}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad K = \alpha_{\max}\left(\frac{R}{U_{\max}}\right)^2$$

Kada se na ovaj voltmetar dovede naizmenični napon, do izražaja dolazi i induktivnost namotaja. Tada, umesto otpornosti, imamo unutrašnju impedansu voltmetra.

$$\underline{Z_V} = R + j\omega L$$

Struja koja protiče kroz instrument je jednaka količniku napona i impedanse.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z_V}} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L} \quad \Rightarrow \quad I = \left|\underline{I}\right| = \left|\frac{\underline{U}}{R + j\omega L}\right| = \frac{\left|\underline{U}\right|}{\left|R + j\omega L\right|} = \frac{U}{\sqrt{(R)^2 + (\omega L)^2}}$$

Sada će otklon kazaljke instrumenta biti dat izrazom:

$$\alpha = K \cdot I^2 = \alpha_{\max}\left(\frac{R}{U_{\max}}\right)^2 \cdot \left(\frac{U}{\sqrt{(R)^2 + (\omega L)^2}}\right)^2$$

U naizmeničnom slučaju, kada je napon na ulazu jednak dometu, nećemo dobiti maksimalan otklon kazaljke (α_{tac}), nego manji (α_{mer}), jer je impedansa uvećana zbog uticaja induktivnosti, pa je struja manja.

$$\alpha_{mer} = \alpha\big|_{U=U_{\max}} = \alpha_{\max}\left(\frac{R}{U_{\max}}\right)^2 \cdot \left(\frac{U_{\max}}{\sqrt{(R)^2 + (\omega L)^2}}\right)^2 = \alpha_{\max}\frac{R^2}{(R)^2 + (\omega L)^2}$$

Relativna greška koja se javlja u ovom slučaju je data izrazom:

$$\Gamma_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{\alpha_{mer}}{\alpha_{tac}} - 1\right) = 100 \cdot \left(\frac{\alpha_{\max}\frac{R^2}{(R)^2 + (\omega L)^2}}{\alpha_{\max}} - 1\right) = 100 \cdot \left(\frac{-(\omega L)^2}{(R)^2 + (\omega L)^2}\right)$$

$$\Gamma_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{-1}{\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + 1}\right) = \frac{-100}{\left(\frac{R}{2\pi f L}\right)^2 + 1} = -1.55\,\%$$

43. Induktivnost kalema merena je ampermetrom opsega 10 mA, voltmetrom opsega 100 V i vatmetrom sa opsezima 10 mA i 100 V, načinjenog za faktor snage 0.2. Klase tačnosti upotrebljenih instrumenata su 1.5. Izmerene su vrednosti od 10 mA, 50 V i 0.1 W. Kolike su sigurne granice greške merenja induktivnosti kalema?

Rešenje:
Reaktivna energija koja se razvija na induktivnosti se može odrediti merenjem snage, napona i struje.

$$Q=(\omega L)I^2=\sqrt{(UI)^2-P^2} \quad \Rightarrow \quad L=\frac{1}{\omega}\frac{\sqrt{(UI)^2-P^2}}{I^2}$$

Treba odrediti totalni izvod izraza za induktivnost po veličinama koje u sebi sadrže grešku.

$$\Delta L=\frac{\partial L}{\partial U}\Delta U+\frac{\partial L}{\partial I}\Delta I+\frac{\partial L}{\partial P}\Delta P$$

$$\frac{\partial L}{\partial U}=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2UI\cdot I}{I^2\sqrt{(UI)^2-P^2}}=\frac{1}{\omega}\frac{U}{\sqrt{(UI)^2-P^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial I}=\frac{1}{\omega}\frac{\dfrac{2UI\cdot U\cdot I^2}{2\sqrt{(UI)^2-P^2}}-\sqrt{(UI)^2-P^2}\cdot 2I}{I^4}=\frac{1}{\omega}\frac{\dfrac{2UI\cdot U\cdot I^2-4I\left((UI)^2-P^2\right)}{2\sqrt{(UI)^2-P^2}}}{I^4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial I}=\frac{1}{\omega}\frac{\dfrac{2UI\cdot U\cdot I^2-4I\left((UI)^2-P^2\right)}{2\sqrt{(UI)^2-P^2}}}{I^4}=\frac{1}{\omega}\frac{2U^2I^3-4U^2I^3+4IP^2}{2I^4\sqrt{(UI)^2-P^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial I}=\frac{1}{\omega}\frac{2P^2-U^2I^2}{I^3\sqrt{(UI)^2-P^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial P}=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2P}{I^2\sqrt{(UI)^2-P^2}}=\frac{1}{\omega}\frac{P}{I^2\sqrt{(UI)^2-P^2}}$$

Maksimalne greške koje mogu da se dese na instrumentima su definisane klasom tačnosti i opsegom merenja.

$$\Delta U=\frac{kl_V}{100}U_{\max}=\frac{1.5}{100}100\text{ V}=1.5\text{ V}$$

$$\Delta I=\frac{kl_A}{100}I_{\max}=\frac{1.5}{100}10\text{ mA}=0.15\text{ mA}$$

$$\Delta P=\frac{kl_W}{100}P_{\max}=\frac{kl_W}{100}U_{W\max}I_{W\max}\cdot 0.2=\frac{1.5}{100}100\text{ V}\cdot 10\text{ mA}\cdot 0.2=3\text{ mW}$$

Sigurne granice greške podrazumevaju zbir apsolutnih vrednosti sabiraka.

$$|\Delta L|\le\left|\frac{1}{\omega}\frac{U}{\sqrt{(UI)^2-P^2}}\Delta U\right|+\left|\frac{1}{\omega}\frac{2P^2-U^2I^2}{I^3\sqrt{(UI)^2-P^2}}\Delta I\right|+\left|-\frac{1}{\omega}\frac{P}{I^2\sqrt{(UI)^2-P^2}}\Delta P\right|$$

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right|\le\frac{\omega I^2}{\sqrt{(UI)^2-P^2}}\left\{\left|\frac{1}{\omega}\frac{U}{\sqrt{(UI)^2-P^2}}\Delta U\right|+\left|\frac{1}{\omega}\frac{2P^2-U^2I^2}{I^3\sqrt{(UI)^2-P^2}}\Delta I\right|+\left|\frac{1}{\omega}\frac{P}{I^2\sqrt{(UI)^2-P^2}}\Delta P\right|\right\}$$

$$\frac{\Delta L}{L}=\left|\frac{U\cdot I^2}{(UI)^2-P^2}\Delta U\right|+\left|\frac{2P^2-U^2I^2}{I^3\left((UI)^2-P^2\right)}\cdot I^2\cdot\Delta I\right|+\left|\frac{P}{(UI)^2-P^2}\Delta P\right|$$

$$\frac{\Delta L}{L}=\left|\frac{U^2\cdot I^2}{(UI)^2-P^2}\frac{\Delta U}{U}\right|+\left|\frac{2P^2-U^2I^2}{(UI)^2-P^2}\cdot\frac{\Delta I}{I}\right|+\left|\frac{P^2}{(UI)^2-P^2}\frac{\Delta P}{P}\right|$$

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right|\le\frac{1}{(UI)^2-P^2}\left\{\left|U^2I^2\cdot\frac{\Delta U}{U}\right|+\left|2P^2-U^2I^2\right|\cdot\frac{\Delta I}{I}\right|+\left|P^2\cdot\frac{\Delta P}{P}\right|\right\}$$

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right|\le\frac{1}{0.1^2-(50\cdot 0.01)^2}\left\{\left|50^2 0.01^2\cdot\frac{1.5}{50}\right|+\left|2\cdot 0.1^2-50^2 0.01^2\right|\cdot\frac{0.15}{10}\right|+\left|0.1^2\cdot\frac{0.003}{0.1}\right|\right\}$$

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right|\le 4.166\cdot\left\{|0.0075|+|0.00345|+|0.0003|\right\}$$

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right|\le 0.0469$$

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right|_{\%}\le 4.69\ \%$$

44. Aktivna snaga induktivnog potrošača, faktora snage manjeg od 0.5, meri se Aronovim spojem. Odrediti sigurne granice greške merenja snage ako prvi vatmetar pokazuje P_{W1}=20 W, a drugi P_{W2}=16.25 W. Klase tačnosti vatmetara su: kl_{W1}=0.5 i kl_{W2}=1.0. Opsezi vatmetara su: U_{W1max}=500 V, I_{W1max}=0.5 A, $cos\varphi_{W1max}$=0.3, U_{W2max}=600 V, I_{W2max}=0.25 A i $cos\varphi_{W2max}$=0.2.

Rešenje:

Ukupna aktivna snaga na osnovu merenja Aronovim spojem je jednaka zbiru (kada je faktor snage veći od 0.5), odnosno razlici pokazivanja dva vatmetra (kada je faktor snage manji od 0.5).

$$P_U=P_1-P_2=20\ \text{W}-16.25\ \text{W}=3.75\ \text{W}$$

Sigurne granice greške se određuju polazeći od totalnog izvoda.

$$|\Delta P_U|\le\left|\frac{\partial P_U}{\partial P_1}\Delta P_1\right|+\left|\frac{\partial P_U}{\partial P_2}\Delta P_2\right|=|1\cdot\Delta P_1|+|-1\cdot\Delta P_2|=|\Delta P_1|+|\Delta P_2|$$

Maksimalna vrednost apsolutne greške vatmetra je definisana klasom tačnosti i opsegom instrumenta.

$$\Delta P_1=\frac{kl_{W1}}{100}P_{W1\max}=\frac{kl_{W1}}{100}U_{W1\max}\cdot I_{W1\max}\cdot\cos\varphi_{W1\max}=\frac{0.5}{100}500\ \text{V}\cdot 0.5\ \text{A}\cdot 0.3=0.375\ \text{W}$$

$$\Delta P_2=\frac{kl_{W2}}{100}P_{W2\max}=\frac{kl_{W2}}{100}U_{W2\max}\cdot I_{W2\max}\cdot\cos\varphi_{W2\max}=\frac{1.0}{100}600\ \text{V}\cdot 0.25\ \text{A}\cdot 0.2=0.3\ \text{W}$$

$$|\Delta P_U|\le|\Delta P_1|+|\Delta P_2|=0.375\ \text{W}+0.3\ \text{W}=0.675\ \text{W}$$

$$\left|\frac{\Delta P_U}{P_U}\right|_{\%}\le 100\cdot\frac{0.675\ \text{W}}{3.75\ \text{W}}=18\ \%$$

Iako se u zadatku koriste instrumenti pristojne klase tačnosti (0.5 i 1.0) rezultat ima sigurne granice greške od 18 %! Ovako velika vrednost potiče od dobijanja rezultata oduzimanjem

približnih vrednosti. Ukoliko je razlika reda veličine samih greška instrumenata, za sigurne granice greške se dobija neočekivano velika vrednost!

45. Kapacitivnost elektrolitskog kondenzatora meri se U/I metodom. Paralelno merenom kondenzatoru nalazi se redna veza voltmetra i kondenzatora dovoljno velike kapacitivnosti. Na miliampermetru i voltmetru su očitane vrednosti 10 mA i 0.63 V. Kolika sistematska greška merenja kapacitivnosti nastaje ako se ne vodi računa o tome da je unutrašnja otpornost voltmetra konačna i da iznosi 1 kΩ?

Rešenje:

Ovde nastaje problem zbog toga što se meri i komponenta struje kroz unutrašnju otpornost voltmetra. Ukoliko to zanemarimo, onda ćemo deljenjem očitanih vrednosti napona i struje dobiti merenu vrednost impedanse kondenzatora.

$$\frac{U}{I}=\left|\frac{1}{j\omega\cdot C_{mer}}\right|=\frac{1}{\omega\cdot C_{mer}} \quad\Rightarrow\quad C_{mer}=\frac{I}{\omega\cdot U}$$

Ako uzmemo u obzir i unutrašnju otpornost voltmetra, dobićemo tačnu vrednost kapacitivnosti.

$$\frac{U}{I}=\left|\frac{R_V\cdot\dfrac{1}{j\omega\cdot C_{tac}}}{R_V+\dfrac{1}{j\omega\cdot C_{tac}}}\right|=\frac{|R_V|\cdot\left|\dfrac{1}{j\omega\cdot C_{tac}}\right|}{\left|R_V+\dfrac{1}{j\omega\cdot C_{tac}}\right|}=\frac{R_V\cdot\dfrac{1}{\omega\cdot C_{tac}}}{\sqrt{(R_V)^2+\left(\dfrac{1}{\omega\cdot C_{tac}}\right)^2}}=\frac{1}{\omega\cdot C_{mer}}$$

$$\left(\frac{U}{I}\right)^2=\frac{\left(\dfrac{R_V}{\omega\cdot C_{tac}}\right)^2}{(R_V)^2+\left(\dfrac{1}{\omega\cdot C_{tac}}\right)^2}$$

$$\left(\frac{U}{I}\right)^2\cdot\left[(R_V)^2+\left(\frac{1}{\omega\cdot C_{tac}}\right)^2\right]=\left(\frac{R_V}{\omega\cdot C_{tac}}\right)^2$$

$$\left(\frac{U}{I}R_V\right)^2+\left(\frac{U}{I}\right)^2\left(\frac{1}{\omega\cdot C_{tac}}\right)^2=\left(\frac{R_V}{\omega\cdot C_{tac}}\right)^2$$

$$\left(\frac{U}{I}\cdot R_V\right)^2=\left(\frac{R_V}{\omega\cdot C_{tac}}\right)^2-\left(\frac{U}{I}\right)^2\left(\frac{1}{\omega\cdot C_{tac}}\right)^2=\frac{1}{(\omega\cdot C_{tac})^2}\left[R_V{}^2-\left(\frac{U}{I}\right)^2\right]$$

$$(\omega\cdot C_{tac})^2=\frac{\left[R_V{}^2-\left(\dfrac{U}{I}\right)^2\right]}{\left(\dfrac{U}{I}\cdot R_V\right)^2}$$

$$C_{tac} = \frac{1}{\omega} \frac{\sqrt{R_V{}^2 - \left(\frac{U}{I}\right)^2}}{\frac{U}{I} \cdot R_V}$$

$$\Gamma_{\%} = 100 \cdot \left[\frac{C_{mer}}{C_{tac}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[\frac{\frac{I}{\omega \cdot U}}{\frac{1}{\omega} \frac{\sqrt{R_V{}^2 - \left(\frac{U}{I}\right)^2}}{\frac{U}{I} \cdot R_V}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[\frac{\frac{I}{\omega \cdot U}}{\frac{I \cdot \sqrt{R_V{}^2 - \left(\frac{U}{I}\right)^2}}{\omega \cdot U \cdot R_V}} - 1 \right]$$

$$= 100 \cdot \left[\frac{R_V}{\sqrt{R_V{}^2 - \left(\frac{U}{I}\right)^2}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[\frac{1000}{\sqrt{1000^2 - \left(\frac{0.63}{0.01}\right)^2}} - 1 \right] = 0.199\,\%$$

46. Pri merenju snage trožičnog, trofaznog, simetričnog potrošača metodom dva vatmetra, dobijena su skretanja α_1=75 podeoka i α_2=-16 podeoka. Koliki je faktor snage potrošača, ako se zna da su vatmetri jednaki?

Rešenje:

Kod Aronovog spoja (metoda merenja pomoću dva vatmetra) znamo da vatmetri pokazuju snage po sledećim izrazima:

$$P_1 = I \cdot U \cdot \cos(30^\circ - \varphi), \quad P_2 = I \cdot U \cdot \cos(30^\circ + \varphi)$$

I je efektivna vrednost fazne struje (simetričan potrošač podrazumeva jednake fazne struje), U je efektivna vrednost međufaznog napona, φ je fazi stav impedane.

Napravimo zbir i razliku pokazivanja vatmetara.

$$P_1 + P_2 = I \cdot U \cdot \left[\cos(30^\circ - \varphi) + \cos(30^\circ + \varphi)\right] = I \cdot U \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos\varphi = I \cdot U \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\varphi$$

$$P_1 - P_2 = I \cdot U \cdot \left[\cos(30^\circ - \varphi) - \cos(30^\circ + \varphi)\right] = I \cdot U \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin\varphi = I \cdot U \cdot \sin\varphi$$

Ako formiramo količnik ovih dveju formula, dobijamo:

$$\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{I \cdot U \cdot \sin\varphi}{I \cdot U \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3} \cdot \cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}} tg\varphi$$

Iz ovog izraza možemo odrediti čemu je jednak tangens faznog stava, potom vrednost faznog stava i na kraju vrednost faktora snage.

$$tg\varphi = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}$$

$$\varphi = arctg\left\{\sqrt{3}\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}\right\}$$

$$\cos\varphi = \cos\left\{arctg\left[\sqrt{3}\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}\right]\right\}$$

U zadatku nisu date pokazivanja vatmetara nego njihovi otkloni iskazani u podeocima. Snaga u vatima je srazmerna otklonu u podeocima, a konstanta srazmere je konstanta vatmetra C_W.

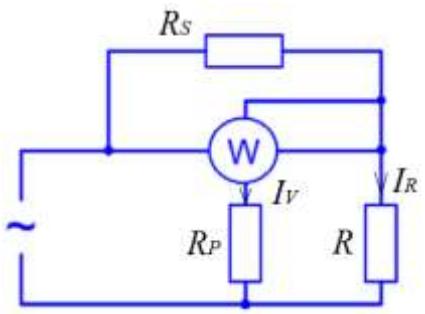
$$P_1 = C_W \cdot \alpha_1, \quad P_2 = C_W \cdot \alpha_2$$

$$\cos\varphi = \cos\left\{arctg\left[\sqrt{3}\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right]\right\}$$

$$\cos\varphi = \cos\left\{arctg\left[\sqrt{3}\frac{75 - (-16)}{75 + (-16)}\right]\right\} = 0.351$$

Napomena: Dobili smo faktor snage manji od 0.5 što je u skladu sa činjenicom da je jedna snaga negativna.

47. Vatmetrom sa skalom od 150 podeoka, dometa 30 W, strujnog opsega 500 mA i unutrašnje otpornosti strujnog ulaza 0.015 kΩ, meri se snaga čisto rezistivnog potrošača R=60 Ω. Da bi se izvršilo potrebno merenje, naponski opseg vatmetra je proširen na opseg od 360 V otpornikom R_P=0.005 MΩ, a strujni opseg je proširen 5 puta odgovarajućim šantom R_S. Odrediti vrednost sistematske greške merenja snage potrošača, koja nastaje usled konačnih vrednosti unutrašnjih otpornosti vatmetra. Klasa vatmetra je 0.5 %.



Rešenje:

Ovde imamo proširenje naponskog i strujnog opsega vatmetra. Naponski opseg se proširuje (slično kao opseg voltmetra) dodavanjem otpornika R_P redno, a strujni opseg se proširuje dodavanjem otpornika R_S paralelno (slično kao opseg ampermetra). Važno je imati u vidu da su naponski i strujni krajevi vatmetra galvanski razdvojeni. Ovu šemu možemo posmatrati, barem što se tiče otornosti namotaja, kao UI metodu kod koje imamo voltmetar i ampermetar vezane umesto vatmetra. U toj terminologiji, ovo bi bio naponski spoj, jer je ukupna otpornost naponskih krajeva paralelno vezana potrošaču. Sistematska greška nastaje zbog toga što struja koja teče kroz strujne krajeve vatmetra nije struja potrošača. To je zbir struje potrošača i struje koja protiče kroz ukupnu otpornost naponskih krajeva. Naponski krajevi novonastalog vatmetra mere dobar napon - napon na potrošaču.

$$I = I_R + I_V$$

Vatmetar meri proizvod struje koja teče kroz njegove strujne krajeve, napona na njegovim naponskim krajevima i faktora snage (kosinus ugla između merenih napona i struje).

$$P_{mer} = I \cdot U \cdot \cos(\angle I, U) = I \cdot U \cdot 1 = \left(I_R + I_V\right) \cdot U = I_R \cdot U + I_V \cdot U$$

Izraz za tačnu vrednost snage je definisan proizvodom struje potrošača, napona na potrošači i faktora snage potrošača.

$$P_{tac} = I_R \cdot U \cdot \cos(\angle I_R, U) = I_R \cdot U$$

Merena vrednost snage se može povezati sa tačnom vrednošću.

$$P_{mer} = P_{tac} + I_V \cdot U = P_{tac} + \frac{U}{R_V} \cdot U = P_{tac} + \frac{U^2}{R_V} = P_{tac} + P_V$$

Prethodni izraz se slaže sa zakonom o održanju energije. Snaga koju meri vatmetar se može iskazati kao zbir snage potrošača (P_{tac}) i snage koja se disipira na unutrašnjoj otpornosti voltmetra (P_V). Sa R_V je obeležena ukupna otpornost naponskih krajeva nakon proširenja naponskog opsega vatmetra: to je redna veza naponskih krajeva vatmetra i dodatnog otpornika.

Na osnovu datih vrednosti dometa vatmetra i dometa strujnih krajeva možemo izračunati domet naponskih krajeva.

$$P_{\max} = U_{\max} \cdot I_{\max} \quad \Rightarrow \quad U_{\max} = P_{\max} / I_{\max} = 30\,\mathrm{W}/500\,\mathrm{mA} = 60\,\mathrm{V}$$

Dodavanjem otpornika R_P proširen je opseg na 360 V, odnosno n=6 puta. Ukupna otpornost naponskih krajeva R_V je onda zbir otpornosti početne otpornosti R_{WV} i dodatne otpornosti R_P.

$$R_V = R_{WV} + R_P = \frac{R_P}{n-1} + R_P = \frac{n \cdot R_P}{n-1} = \frac{6 \cdot 5\,\mathrm{k\Omega}}{6\text{-}1} = 6\,\mathrm{k\Omega}$$

Relativno iskazana greška merenje je data izrazom.

$$\Gamma_{\%} = 100\left(\frac{P_{mer}}{P_{tac}} - 1\right) = 100\left(\frac{P_{tac} + \frac{U^2}{R_V}}{P_{tac}} - 1\right) = 100\left(\frac{\frac{U^2}{R_V}}{P_{tac}}\right) = 100\left(\frac{\frac{U^2}{R_V}}{\frac{U^2}{R}}\right) = 100\frac{R}{R_V} = 100\frac{60\,\Omega}{6000\,\Omega} = 1\,\%$$

48. Za merenje nepoznate otpornosti metodom poređenja na raspolaganju su izvor konstantne struje, etalon-otpornik otpornosti od 1000 Ω i voltmetar sa pokretnim gvožđem, unutrašnje otpornosti od 0.005 MΩ, opsega 10 V. Kolika je nepoznata otpornost otpornika ako napon na njemu iznosi 2.0 V, a na etalon-otporniku 1.0 V?

Rešenje:

Osnovno kolo čini strujni izvor koji napaja rednu vezu etalonskog otpornika i otpornika čiju otpornost merimo. Voltmetar se spoji paralelno etalonskom, a potom merenom otporniku i očitaju se dva napona. Moramo uzeti u obzir unutrašnju otpornost voltmetra.

$$U_N = I \cdot \frac{R_N \cdot R_V}{R_N + R_V}, \quad U_X = I \cdot \frac{R_X \cdot R_V}{R_X + R_V}$$

$$\frac{U_N}{U_X} = \frac{\frac{R_N \cdot R_V}{R_N + R_V}}{\frac{R_X \cdot R_V}{R_X + R_V}} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_X \cdot R_V}{R_X + R_V} = \frac{\frac{R_N \cdot R_V}{R_N + R_V}}{\frac{U_N}{U_X}} = \frac{\frac{1\,\mathrm{k\Omega} \cdot 5\,\mathrm{k\Omega}}{1\,\mathrm{k\Omega} + 5\,\mathrm{k\Omega}}}{\frac{1\,\mathrm{V}}{2\,\mathrm{V}}} = 1.67\,\mathrm{k\Omega}$$

$$R_X \cdot 5\,\mathrm{k\Omega} = 1.67\,\mathrm{k\Omega}(R_X + 5\,\mathrm{k\Omega})$$

$$R_X \cdot (5\,\mathrm{k\Omega}\text{-}1.67\,\mathrm{k\Omega}) = 1.67\,\mathrm{k\Omega} \cdot 5\,\mathrm{k\Omega}$$

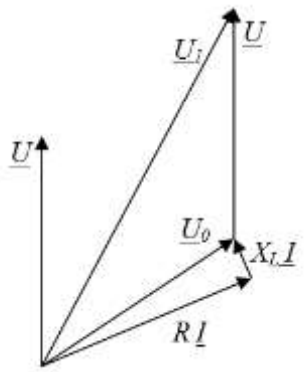
$$R_X = 2.5\,\mathrm{k\Omega}$$

Napomena: da je voltmetar imao beskonačnu otpornost onda bi se dva izmerena napona odnosili kao otpornosti na kojima je vršeno merenje napona, jer je struja konstantna. Onda bi rešenje bilo 2 kΩ.

49. Aktivna snaga monofaznog potrošača meri se pomoću tri voltmetra sa pokretnim gvožđem, klasa tačnosti 1.5, opsega 16 V. Očitane su vrednosti od 15.0 V, 10.0 V i 10.0 V. Voltmetri se mogu smatrati da imaju idealnu unutrašnju otpornost. Kolika sistematska greška merenja nastaje ako se zanemari činjenica da reaktansa dodatnog otpornika koji se koristi u ovoj metodi nije jednaka nuli, već iznosi 0.4 % od njegove otpornosti?

Rešenje:

Klase tačnosti instrumenata su date u ovom zadatku radi zbunjivanja! Klasom tačnosti je definisana greška slučajnog tipa: mi ne znamo stvarnu vrednost greške, znamo samo granice greške, pa ne možemo da izvršimo korekciju. Sistematska greška potiče od reaktanse dodatnog otpornika, i ukoliko znamo mehanizam nastanka greške, moći ćemo da izvršimo korekciju. Pošto ništa nije rečeno u tekstu zadatka, smatraćemo da je reaktansa induktivnog tipa.



Ako zanemarimo činjenicu da postoji reaktansa dodatnog otpornika, onda ćemo primenom formule za merenje snage metodom tri voltmetra dobiti merenu vrednost snage.

$$P_{mer} = \frac{U_1^{\,2} - U_0^{\,2} - U^2}{2R} = \frac{12.5}{R}$$

Tačnu vrednost aktivne snage ćemo dobiti množenjem napona na potrošaču, struje potrošača i kosinusa faznog stava potrošača.

$$P_{tac} = U \cdot I \cdot \cos(\angle U, I) = U \cdot \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + X_L^{\,2}}} \cdot \cos(\angle U, U_0 + \angle RI, U_0)$$

Kosinus ugla između U i U_o se određuje iz trougla koji čine tri napona primenom kosinusne teoreme.

$$\cos(\angle U, U_0) = \frac{U_1^{\,2} - U_0^{\,2} - U^2}{2UU_0} = \frac{15^2 - 10^2 - 10^2}{2 \cdot 10 \cdot 10} = 0.125$$

$$\angle U, U_0 = \arccos(0.125) = 82.819^{\,o}$$

Ugao između napona U_0 i struje I bi bio nula da dodatni otpornik nema induktivnu komponentu. Vrednost ovog ugla ćemo odrediti iz pravouglog trougla koji čine naponi RI, X_LI i U_0.

$$tg(\angle RI, U_0) = \frac{X_L I}{RI} = \frac{X_L}{R} = 0.4\,\% = 0.004$$

$$\angle RI, U_0 = arctg(0.004) = 0.229^{\,o}$$

$$P_{tac} = U \cdot \frac{U_0}{R\sqrt{1+\left(\frac{X_L}{R}\right)^2}} \cdot \cos(82.819^{\,o} + 0.229^{\,o}) = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0.121}{R \cdot \sqrt{1+0.004^2}}$$

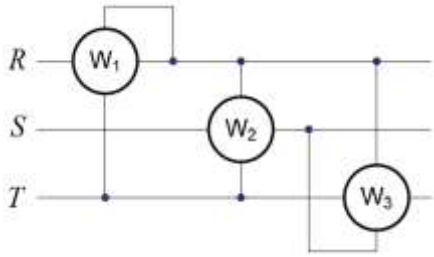
$$P_{tac} = \frac{12.1}{R}$$

Relativno iskazana sistematska greška je data izrazom:

$$\Gamma_{\%} = 100\left(\frac{P_{mer}}{P_{tac}} - 1\right) = 100\left(\frac{12.5}{12.1} - 1\right) = 3.3\,\%$$

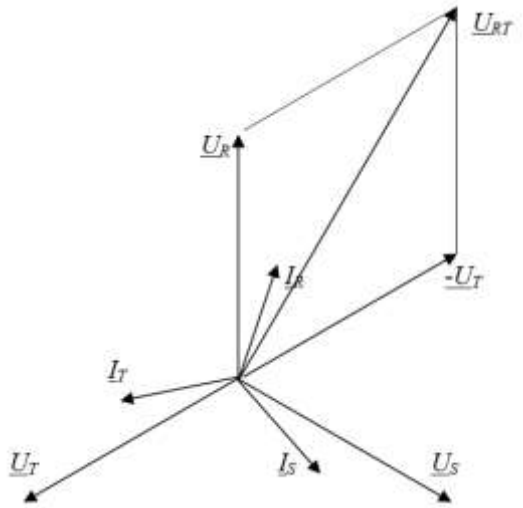
50.

Reaktivna snaga trofaznog, trožičnog, približno simetričnog, induktivnog potrošača meri se metodom sa tri vatmetra, klasa tačnosti 1.5, opsega 600 W, idealnih unutrašnjih otpornosti. Nepažnjom, šema je povezana kao na slici. Kolika sistematska greška merenja reaktivne snage nastaje zbog pogrešnog vezivanja, ako je faktor snage potrošača približno 0.95?



Rešenje:

Da bi pokazivanje vatmetra (merila aktivne snage) moglo da se iskoristi za merenje reaktivne snage, vatmetar treba da bude vezan tako da meri struju iz jedne faze, a napon između drugih dveju faza. Vatmetri W_2 i W_3 su upravo tako vezani.



Pokazivanja W_2 je dato izrazom.

$$P_{W2} = I_S \cdot U_{RT} \cdot \cos(\angle I_S, U_{RT})$$

$$P_{W2} = I_S \cdot U_{RT} \cdot \cos(\varphi + 90^{\,o})$$

$$P_{W2} = I_S \cdot U_{RT} \cdot \sin(\varphi)$$

Ako je izvor simetričan onda su fazni naponi međusobno jednaki. Ako je potrošač simetričan onda su struje međusobno jednake. Obzirom da su vatmetri W_2 i W_3 vezani na isti način, oni će pokazivati jednako.

$$I = I_R = I_S = I_T$$

$$U = U_R = U_S = U_T$$

$$P_{W2} = P_{W3} = I \cdot \sqrt{3}U \cdot \sin(\varphi)$$

Da su sva tri vatmetra vezana kako treba zbir njihovih pokazivanja bi mogao biti iskorišćen za određivanje ukupne reaktivne snage.

$$3 \cdot I \cdot \sqrt{3}U \cdot \sin(\varphi) = \sqrt{3} \cdot Q_{tac}$$

$$\cos(\varphi) = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 18.19^{o}$$

$$3 \cdot I \cdot \sqrt{3}U \cdot \sin(\varphi) = \sqrt{3} \cdot Q_{tac} = 3 \cdot I \cdot U \cdot 0.312 = 0.936 \cdot I \cdot U$$

Vatmetar W_1 nije dobro povezan.

$$P_{W1} = I_R \cdot U_{RT} \cdot \cos(\angle I_R, U_{RT})$$

$$P_{W1} = I_R \cdot U_{RT} \cdot \cos(30^{o} - \varphi)$$

Ako u ovom slučaju saberemo pokazivanja tri vatmetra i podelimo faktorom √3, dobićemo merenu vrednost reaktivne snage.

$$Q_{mer} = \frac{P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}}{\sqrt{3}} = \frac{I \cdot \sqrt{3}U \cdot \cos(30^{o} - \varphi) + 2 \cdot I \cdot \sqrt{3}U \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{3}}$$

$$Q_{mer} = I \cdot U\left(\cos(30^{o} - \varphi) + 2 \cdot \sin(\varphi)\right)$$

$$Q_{mer} = I \cdot U\left(0.979 + 0.624\right)$$

$$Q_{mer} = I \cdot U \cdot 1.603$$

Relativno iskazana sistematska greška:

$$\Gamma_{\%} = 100\left(\frac{Q_{mer}}{Q_{tac}} - 1\right) = 100\left(\frac{I \cdot U \cdot 1.603}{I \cdot U \cdot 0.936} - 1\right) = 71\,\%$$

$$\Gamma_{\%} = 71\,\%$$

51. Na voltmetar sa kretnim kalemom i dvostranim ispravljačem, kalibrisanim tako da meri efektivnu vrednost prostoperiodičnog napona, doveden je jednostrano ispravljen prostoperiodični napon. Kolika je sistematska greška merenja?

Rešenje:

Pošto je mereni napon stalno pozitivan (jednostrano ispravljena sinusoida), dvostrani ispravljač ovde nema funkciju: na izlazu dvostranog ispravljača će biti isti napon kao što je na ulazu. Instrument sa kretnim kalemom meri srednju vrednost napona iza ispravljača.

$$U_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T u''(t) \cdot dt = \frac{1}{T}\left\{\int_0^{T/2} U_m \sin(\omega t) \cdot dt + \int_{T/2}^{T} 0 \cdot dt\right\} = \frac{U_m}{T}\left(\frac{-1}{\omega}\right)\cos(\omega t)\Big|_0^{T/2} =$$

$$U_{sr} = \frac{U_m}{T}\left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T}}\right)\cos(\frac{2\pi}{T}t)\Big|_0^{T/2} = \frac{-U_m}{2\pi}\left\{\cos(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}) - \cos(0)\right\} = \frac{U_m}{\pi}$$

Instrument je kalibrisan da pokazuje efektivnu vrednost prostoperiodičnog napona, što znači da množi srednju vrednost faktorom oblika. Vrednost faktora oblika za dvostrani ispravljač i prostoperiodični talasni oblik iznosi 1.11.

$$U_{mer} = 1.11 \cdot U_{sr} = 1.11 \cdot \frac{U_m}{\pi}$$

Tačna vrednost je efektivna vrednost merenog napona. Efektivna vrednost se određuje po definiciji.

$$U_{tac} = U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left\{\int_0^{T/2} U_m{}^2 \sin^2(\omega t)\cdot dt + \int_{T/2}^{T} 0\cdot dt\right\}}$$

Uvešćemo smenu za kvadrat sinusne funkcije.

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$U_{tac} = U_m\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right)\cdot dt} = U_m\sqrt{\frac{1}{T}\left\{\int_0^{T/2}\frac{1}{2}\cdot dt - \int_0^{T/2}\frac{1}{2}\cos(2\omega t)\cdot dt\right\}}$$

Vrednost drugog integrala je nula pošto je u pitanju integral nad jednom celom periodom prostoperiodične funkcije. Ostaje samo prvi integral.

$$U_{tac} = U_m\sqrt{\frac{1}{T}\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2} - 0\right)} = \frac{U_m}{2}$$

Sada možemo odrediti vrednost sistematske greške zbog talasnog oblika.

$$\Gamma_{\%} = 100\left(\frac{U_{mer}}{U_{tac}} - 1\right) = 100\left(\frac{1.11\cdot\frac{U_m}{\pi}}{\frac{U_m}{2}} - 1\right) = 100\left(\frac{2.22}{\pi} - 1\right) = -29.3\,\%$$

52. Dato je 20 rezultata merenja otpornika R1 i 40 rezultata merenja otpornika R2. Ommetar kojim je vršeno merenje otpornosti ima grešku manju od 1 % od opsega. Merenja su vršena na opsegu do 2 kΩ, odnosno 20 kΩ. Kolika je merna nesigurnost paralelne veze ova dva otpornika?

R1 **Ω**	**R2** **Ω**	
1005.9	9951.8	9982.9
1006.0	10004.6	9966.3
1003.5	9992.4	9981.9
997.2	9996.0	10013.7
1006.3	9960.3	9950.3
1001.7	9993.6	9953.3
998.5	10010.2	9954.1
1001.7	9960.5	10013.6
999.0	10016.7	9977.2
999.0	10017.2	9959.1
998.1	9981.7	9992.9
1002.9	10009.9	9992.5
999.4	10000.4	10013.9
998.3	9974.5	9979.3
1003.7	9962.2	9958.2

1001.8	9965.5	10006.0
1005.3	9967.3	9950.2
999.2	10014.2	9957.4
1000.5	10002.5	9971.2
1002.4	9973.9	9983.2

Rešenje:
Za date skupove vrednosti možemo odrediti srednju vrednost i standardnu devijaciju.
$\overline{R_1} = 1001.5\,\Omega, \quad \sigma_{R_1} = 2.9\,\Omega$, odnosno $\overline{R_2} = 9982.9\,\Omega, \quad \sigma_{R_2} = 22.1\,\Omega$

Prvo ćemo odrediti mernu nesigurnost za svaki od otpornika.

Merna nesigurnost otpornika R_1: $u(R_1)$, koja se sastoji od merne nesigurnosti TIPA (zbog serije merenja) i merne nesigurnosti TIPB (zbog greške instrumenta kojim su vršena merenja).

$$u(R_1) = \sqrt{[u_A(R_1)]^2 + [u_B(R_1)]^2}$$

Merna nesigurnost TIPA za otpornik R_1 se određuje kao standardna devijacija skupa izmerenih vrednosti za R_1 podeljena korenom iz broja merenja.

$$u_A(R_1) = \frac{\sigma_{R_1}}{\sqrt{20}} = \frac{2.9\,\Omega}{\sqrt{20}} = 0.7\,\Omega$$

Merna nesigurnost TIPB za otpornik R_1 je određena granicom greške ommetra podeljenom sa koren iz 3, pošto pretpostavljamo ravnomernu raspodelu (ništa drugo saopšteno o vrsti raspodele za grešku).

$$u_B(R_1) = \frac{1\,\% \cdot 2\,\text{k}\Omega}{\sqrt{3}} = \frac{20\,\Omega}{\sqrt{3}} = 11.54\,\Omega$$

Konačno, možemo odrediti mernu nesigurnost otpornika R_1:

$$u(R_1) = \sqrt{[u_A(R_1)]^2 + [u_B(R_1)]^2} = \sqrt{[0.7\,\Omega]^2 + [11.54\,\Omega]^2} = 11.56\,\Omega$$

Slična računica se sprovodi i za otpornik R_2.

$$u(R_2) = \sqrt{[u_A(R_2)]^2 + [u_B(R_2)]^2}$$

$$u_A(R_2) = \frac{\sigma_{R_2}}{\sqrt{40}} = \frac{22.1\,\Omega}{\sqrt{40}} = 3.5\,\Omega$$

$$u_B(R_2) = \frac{1\,\% \cdot 20\,\text{k}\Omega}{\sqrt{3}} = \frac{200\,\Omega}{\sqrt{3}} = 115.4\,\Omega$$

$$u(R_2) = \sqrt{[u_A(R_2)]^2 + [u_B(R_2)]^2} = \sqrt{[3.5\,\Omega]^2 + [115.4\,\Omega]^2} = 115.5\,\Omega$$

Sada možemo napisati izraz za paralelnu vezu otpornika R_1 i R_2. Za vrednosti R_1 i R_2 uzimamo izračunate srednje vrednosti.

$$R_E = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1001.5\,\Omega \cdot 9982.8\,\Omega}{1001.5\,\Omega + 9982.8\,\Omega} = 910.19\,\Omega$$

Mernu nesigurnost otpornosti R_E određujemo na osnovu izraza:

$$u(R_E)=\sqrt{\left[\frac{\partial R_E}{\partial R_1}\cdot u(R_1)\right]^2+\left[\frac{\partial R_E}{\partial R_2}\cdot u(R_2)\right]^2}$$

Parcijalni izvodi predstavljaju koeficijente osetljivosti

$$c_{R_1}=\frac{\partial R_E}{\partial R_1}=\frac{R_2\cdot(R_1+R_2)-R_1\cdot R_2\cdot 1}{(R_1+R_2)^2}=\frac{R_2{}^2}{(R_1+R_2)^2}=\left[\frac{R_2}{R_1+R_2}\right]^2=\left[\frac{9982.8\,\Omega}{1001.5\,\Omega+9982.8\,\Omega}\right]^2=0.826$$

$$c_{R_2}=\frac{\partial R_E}{\partial R_2}=\frac{R_1\cdot(R_1+R_2)-R_1\cdot R_2\cdot 1}{(R_1+R_2)^2}=\frac{R_1{}^2}{(R_1+R_2)^2}=\left[\frac{R_1}{R_1+R_2}\right]^2=\left[\frac{1001.5\,\Omega}{1001.5\,\Omega+9982.8\,\Omega}\right]^2=0.0083$$

Sada imamo sve podatke potrebne za određivanje merne nesigurnosti paralelne otpornosti:

$$u(R_E)=\sqrt{[0.826\cdot 11.56\,\Omega]^2+[0.0083\cdot 115.5\,\Omega]^2}=\sqrt{91.17\,\Omega^2+0.917\,\Omega^2}=9.6\,\Omega$$

Možemo mernu nesigurnost izraziti u relativnom obliku, u procentima:

$$u_{\%}(R_E)=\frac{u(R_E)}{R_E}\cdot 100=\frac{9.6\,\Omega}{910.16\,\Omega}\cdot 100=1.05\,\%$$

53. Za merenje struje na raspolaganju je: a) milivoltmetar dometa 60 mV, klase tačnosti 1 i unutrašnje otpornosti od (6 ± 0.03) Ω, i b) šant za 60 A i 60 mV, klase tačnosti 0.5. Kolike je relativno iskazana merna nesigurnost merenja struje ako milivoltmetar pokazuje 20 mV, ako se zna da odstupanja otpornosti šanta i otpornosti voltmetra imaju trougaonu raspodelu?

$$I=\frac{U}{R_V\|R_S}=\frac{U(R_V+R_S)}{R_V\cdot R_S}$$

$$u(I)=\sqrt{\left[\frac{\partial I}{\partial U}u(U)\right]^2+\left[\frac{\partial I}{\partial R_V}u(R_V)\right]^2+\left[\frac{\partial I}{\partial R_S}u(R_S)\right]^2}$$

$$c_U=\frac{\partial I}{\partial U}=\frac{R_V+R_S}{R_V\cdot R_S}=1000.17$$

$$c_{R_V}=\frac{\partial I}{\partial R_V}=U\cdot\frac{1\cdot(R_V\cdot R_S)-(R_V+R_S)\cdot R_S}{(R_V\cdot R_S)^2}=U\cdot\frac{-R_S{}^2}{(R_V\cdot R_S)^2}=\frac{-U}{R_V{}^2}$$

$$c_{RS}=\frac{\partial I}{\partial R_S}=U\cdot\frac{1\cdot(R_V\cdot R_S)-(R_V+R_S)\cdot R_V}{(R_V\cdot R_S)^2}=U\cdot\frac{-R_V{}^2}{(R_V\cdot R_S)^2}=\frac{-U}{R_S{}^2}$$

$$u(U)=\frac{kl_V\cdot U_{\max}}{100\cdot\sqrt{3}}=\frac{1\cdot 60\text{ mV}}{100\cdot\sqrt{3}}=0.346\text{ mV}$$

$$u(R_V)=\frac{\Delta R_V}{\sqrt{6}}=\frac{0.03\,\Omega}{\sqrt{6}}=12.2\text{ m}\Omega$$

$$u(R_S)=\frac{\Delta R_S}{\sqrt{6}}=\frac{kl_S\cdot U_S/I_S}{100\cdot\sqrt{6}}=\frac{0.5\cdot 60\text{ mV}/60\text{ A}}{100\cdot\sqrt{6}}=\frac{0.5\cdot 1\,\text{m}\Omega}{100\cdot\sqrt{6}}=2.04\,\mu\Omega$$

$$u(I)=\sqrt{\left[\frac{R_V+R_S}{R_V\cdot R_S}\cdot 0.346\,\text{mV}\right]^2+\left[\frac{-U}{{R_V}^2}\cdot 12.2\,\text{m}\Omega)\right]^2+\left[\frac{-U}{{R_S}^2}\cdot 2.04\,\mu\Omega\right]^2}$$

$$\frac{u(I)}{I}_{\%}=1.74\,\%$$

54. Koliku otpornost ima otpornik preko kojeg se kondenzator od 80 nF isprazni na polovinu početne vrednosti za 15.3 s? Kada se otpornik ukloni, kondenzator se isprazni na polovinu početnog napona za 62 s.

Rešenje:
Ako imamo kondenzator kapacitivnosti *C*, koji je napunjen na napon *E*, a u trenutku *t*=0 se na njega veže otpornik otpornosti *R*, onda se napon na kondenzatoru ponaša po zakonitosti:

$$u(t)=E\cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Zbog drugog dela zadatka, u kojem se kaže da se kondenzator prazni i kada se ukloni mereni otpornik, zaključujemo da postoji još neka otpornost paralelno vezana kondenzatoru. To može da bude otpornost voltmetra kojim se vrši nadgledanje napona, može da bude parazitna otpornost samog kondenzatora, paralelna veza ove dve otpornosti, itd... Obeležimo ovu otpornost sa R_C.
Dakle, kada imamo kondenzator koji se prazni kroz otpornost R_C, zavisnost napona od vremena će biti:

$$u_2(t)=E\cdot e^{-\frac{t}{R_C\cdot C}}$$

Kaže se da se početni napon na kondenzatoru, nakon vremena T_2=62 s, prepolovi:

$$u_2(T_2)=\frac{E}{2}=E\cdot e^{-\frac{T_2}{R_C\cdot C}}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}=e^{-\frac{T_2}{R_C\cdot C}}\quad\Rightarrow\quad 2=e^{\frac{T_2}{R_C\cdot C}}\quad\Rightarrow\quad\ln 2=\frac{T_2}{R_C\cdot C}$$

$$R_C=\frac{T_2}{\ln 2\cdot C}$$

U prvom delu vremena, kondenzator se prazni kroz ekvivalentnu otpornost koja je jednaka paralelnoj vezi merenog otpornika *R* i otpornosti R_C. Sada je napon na kondenzatoru dat jednačinom:

$$u_1(t)=E\cdot e^{-\frac{t}{(R\|R_C)C}}$$

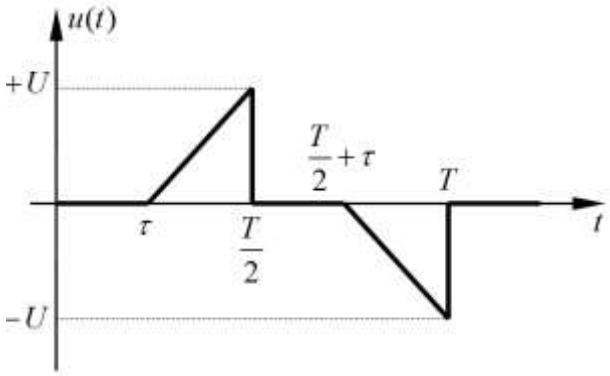
Nakon vremena T_1=15.3 s, početni napon se prepolovi.

$$u_1(T_1)=\frac{E}{2}=E\cdot e^{-\frac{T_1}{(R\|R_C)\cdot C}}\quad\Rightarrow\quad R\|R_C=\frac{T_1}{\ln 2\cdot C}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{R\|R_C}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_C}=\frac{\ln 2\cdot C}{T_1}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{\ln 2\cdot C}{T_1}-\frac{1}{R_C}=\frac{\ln 2\cdot C}{T_1}-\frac{\ln 2\cdot C}{T_2}$$

$$R = \frac{1}{\frac{\ln 2 \cdot C}{T_1} - \frac{\ln 2 \cdot C}{T_2}} = 366\ \text{M}\Omega$$

55. Napon *u(t)* je doveden na V_1 (voltmetar sa kretnim kalemom i dvostranim ispravljačem, kalibrisanim da pokazuje efektivnu vrednost prostoperiodičnog napona) i V_2 (voltmetar sa mekim gvožđem). Ako je pokazivanje prvog voltmetra 100 V, koliko pokazuje drugi voltmetar? $\tau = T/(2a)$, *a*=4.



REŠENJE:

V_1 meri srednju vrednost dvostrano ispravljenog napona i množi faktorom oblika $\pi/(2\sqrt{2})$.

$$U_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot U_{sr} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)| \cdot dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{T} \cdot 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot U \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{2a}\right)\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot U \cdot \frac{a-1}{2a}$$

$$U_1 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot U \cdot \frac{a-1}{a} = 100\ \text{V}$$

$$U = (100\ \text{V}) \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{a}{a-1}$$

V_2 meri efektivnu vrednost napona *u(t)*. Računanje efektivne vrednost, zbog oblika signala se može uprostiti računanjem integrala u polovini periode i množenjem sa dva.

$$U_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot 2 \cdot \int_0^{T/2} u^2(t) \cdot dt}$$

Sada je potrebno odrediti zavisnost napona *u(t)* u prvoj polovini periode. Zavisnost je linearna, pa možemo pretpostaviti oblik.

$$u(t) = k \cdot t + n$$

Poznate su dve tačke kroz koje prolazi linearna zavisnost.

$$u(\tau) = k \cdot \tau + n = k \cdot \frac{T}{2a} + n = 0$$

$$u(\frac{T}{2}) = k \cdot \frac{T}{2} + n = U$$

Oduzimanjem druge i prve jednačine dobijamo:

$$u(\frac{T}{2}) - u(\tau) = U = k\left(\frac{T}{2} - \frac{T}{2a}\right) = \frac{kT}{2a}(a-1) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2aU}{T(a-1)}$$

Iz prve jednačine se može odrediti *n*.

$$k\cdot\tau+n=0 \quad\Rightarrow\quad n=-k\tau=-\frac{2aU}{T(a-1)}\cdot\frac{T}{2a}=-\frac{U}{a-1}$$

Konačno, imamo analitički zapis za *u(t)*.

$$u(t)=\begin{cases}0, & 0<t<\tau\\ \dfrac{U}{a-1}\left(\dfrac{2a}{T}\cdot t-1\right) & \tau<t<T/2\end{cases}$$

$$U_2=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot 2\cdot\int_0^{T/2}u^2(t)\cdot dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot 2\cdot\int_\tau^{T/2}\left[\frac{U}{a-1}\left(\frac{2a}{T}\cdot t-1\right)\right]^2\cdot dt}$$

$$U_2=\sqrt{\frac{1}{T}\cdot 2\cdot\int_\tau^{T/2}\left[\frac{U^2}{(a-1)^2}\left(\frac{4a^2}{T^2}\cdot t^2-\frac{4a}{T}\cdot t+1\right)\right]\cdot dt}$$

$$U_2=\frac{U}{a-1}\sqrt{\frac{2}{T}\cdot\int_\tau^{T/2}\left(\frac{4a^2}{T^2}\cdot t^2-\frac{4a}{T}\cdot t+1\right)\cdot dt}$$

$$U_2=\frac{U}{a-1}\sqrt{\frac{2}{T}\cdot\left[\frac{4a^2}{T^2}\cdot\frac{t^3}{3}-\frac{4a}{T}\cdot\frac{t^2}{2}+t\right]\Bigg|_{\frac{T}{2a}}^{\frac{T}{2}}}$$

$$U_2=\frac{U}{a-1}\sqrt{\frac{2}{T}\cdot\left[\frac{4a^2}{3T^2}\cdot\left(\left(\frac{T}{2}\right)^3-\left(\frac{T}{2a}\right)^3\right)-\frac{4a}{2T}\cdot\left(\left(\frac{T}{2}\right)^2-\left(\frac{T}{2a}\right)^2\right)+\left(\frac{T}{2}-\frac{T}{2a}\right)\right]}$$

$$U_2=\frac{U}{a-1}\sqrt{\frac{2}{T}\cdot\left[\frac{4a^2}{3T^2}\cdot\frac{T^3(a^3-1)}{8a^3}-\frac{4a}{2T}\cdot\frac{T^2(a^2-1)}{4a^2}+\frac{T(a-1)}{2a}\right]}$$

$$U_2=\frac{U}{a-1}\sqrt{\frac{2}{T}\cdot\left[\frac{a^2}{3}\cdot\frac{T(a^3-1)}{2a^3}-\frac{a}{2}\cdot\frac{T(a^2-1)}{a^2}+\frac{T(a-1)}{2a}\right]}$$

$$U_2=\frac{U}{a-1}\sqrt{2\cdot\left[\frac{a^2}{3}\cdot\frac{(a^3-1)}{2a^3}-\frac{a}{2}\cdot\frac{(a^2-1)}{a^2}+\frac{(a-1)}{2a}\right]}$$

$$U_2=\frac{U}{a-1}\sqrt{2\cdot\left[\frac{a^5-a^2}{6a^3}-\frac{a^3-a}{2a^2}+\frac{a-1}{2a}\right]}$$

$$U_2=\frac{U}{a-1}\sqrt{2\cdot\left[\frac{a^5-a^2-3a(a^3-a)+3a^2(a-1)}{6a^3}\right]}$$

$$U_2=\frac{U}{a-1}\sqrt{2\cdot\left[\frac{a^5-a^2-3a^4+3a^2+3a^3-3a^2}{6a^3}\right]}$$

$$U_2=\frac{U}{a-1}\sqrt{2\cdot\left[\frac{a^5-a^2-3a^4+3a^3}{6a^3}\right]}$$

$$U_2 = \frac{U}{a-1}\sqrt{2\cdot\left[\frac{a^3-3a^2+3a-1}{6a}\right]} = \frac{U}{a-1}\sqrt{2\cdot\frac{(a-1)^3}{6a}} = U\sqrt{\frac{a-1}{3a}}$$

$$U_2 = U\sqrt{\frac{a-1}{3a}}$$

Spajanjem formule za U_1 i U_2, dobijamo:

$$U = (100\text{ V})\cdot\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{a}{a-1}$$

$$U_2 = U\sqrt{\frac{a-1}{3a}} = (100\text{ V})\cdot\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{a}{a-1}\cdot\sqrt{\frac{a-1}{3a}} = (100\text{ V})\cdot\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{a^2(a-1)}{3a(a-1)^2}}$$

$$U_2 = (100\text{ V})\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{2a}{3(a-1)}} = 120\text{ V}$$

Napomena: Ako se napon pomeri po vremenskoj osi, tako da porast signala počinje u t=0, dobija se višestruko lakše rešavanje ovog zadatka!

56. Aktivna snaga trofaznog potrošača priključenog na trofazni četvorožični sistem meri se jednim vatmetrom. Nazivna vrednost faktora snage potrošača iznosi 0.5. Pretpostaviti da je trofazni sistem napona idealan a upotrebljeni vatmetar se može smatrati dovoljno tačnim. Kolike su sigurne granice greške merenja ako se zna da se fazne struje ne razlikuju za više od 1.5 % od nazivne struje, a fazni uglovi ne razlikuju za više od 0.5° od nazivnog faznog ugla?

Rešenje:

Vatmetar povezan, na primer u fazi R, meri aktivnu snagu iz jedne faze. Ako pretpostavimo da su izvor i potrošač simetrični, ukupna snaga je tri puta veća:

$$P_{mer} = 3\cdot P_R$$

Ako se struje u fazama razlikuju, odnosno ako se razlikuju fazni stavovi, onda pretpostavka nije tačna, pa će $P_{tač}$ biti različito od P_{mer} za dvostruku vrednost totalnog izvoda (greška se javlja u dve faze, a u jednoj fazi je dobro merenje)

$$\left|P_{mer} - P_{tač}\right| = 2\cdot\Delta P = 2\cdot\left\{\left|\frac{\partial P}{\partial I}\cdot\Delta I\right| + \left|\frac{\partial P}{\partial \varphi}\cdot\Delta\varphi\right|\right\}$$

$$P = U\cdot I\cdot\cos\varphi$$

$$\frac{\partial P}{\partial I} = U\cdot\cos\varphi\ ,\ \frac{\partial P}{\partial \varphi} = U\cdot I\cdot\left(-\sin\varphi\right)\cdot\Delta\varphi$$

$$\left|P_{mer} - P_{tač}\right| = 2\cdot\left\{U\cdot\cos\varphi\cdot\Delta I + U\cdot I\cdot\sin\varphi\cdot\Delta\varphi\right\}$$

Relativno iskazanu grešku možemo proceniti pomoću izraza:

$$\frac{\left|P_{mer} - P_{tač}\right|}{P_{tač}} = \frac{2\cdot\left\{U\cdot\cos\varphi\cdot\Delta I + U\cdot I\cdot\sin\varphi\cdot\Delta\varphi\right\}}{3\cdot U\cdot I\cdot\cos\varphi} = \frac{2}{3}\cdot\left\{\frac{\Delta I}{I} + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\Delta\varphi\right\} = \frac{2}{3}\cdot\left\{\frac{\Delta I}{I} + tg\varphi\cdot\Delta\varphi\right\}$$

$$\frac{\left|P_{mer} - P_{tač}\right|}{P_{tač}} = \frac{2}{3}\cdot\left\{\frac{1.5}{100} + tg\left(\arccos\left(0.5\right)\right)\cdot\frac{0.5^o}{180^o}\cdot 3.14159\right\}$$

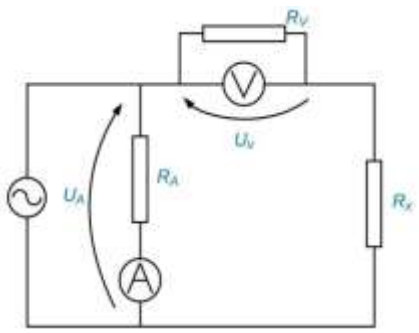
Ovaj izraz nije u potpunosti korektan! U imeniocu izraza treba da stoji tačna vrednost snage, ali je mi ne znamo. Da bismo uopšte procenili kolika je relativno iskazana greška, umesto tačnom vrednošću, apsolutnu grešku delimo merenom vrednošću. Svesni smo da na ovaj način izračunavamo relativnu grešku sa nekom malom greškom!?

$$\frac{|P_{mer} - P_{tač}|}{P_{tač}}_{\%} \approx 2.0\ \%$$

NAPOMENA: ugao mora biti izražen u radijanima, ne u stepenima!

57. Studenti su na laboratorijskim vežbama sastavili strujni spoj U/I metode za merenje otpornosti. Greškom su u šemi spojili voltmetar na mesto ampermetra i ampermetar na mesto voltmetra, a to nisu primetili. Oba instrumenta su sa mekim gvožđem i skalama sa po 100 podeoka. Ampermetar ima opseg od 0.4 A i klasu tačnosti 1 %. Voltmetar ima klasu tačnosti 0.5 %. Karakteristična unutrašnja otpornost voltmetra je 48 Ω/V, a ampermetra 10 ΩA. Šema se napaja iz izvora prostoperiodičnog napona frekvencije 105 Hz. Otpornik koji se meri ima otpornost od 146.67 Ω. Studenti su odabrali merni opseg voltmetra od 2.5 V i pokušali da izmere otpornost otpornika ovako pogrešno povezanom šemom. Ako je ampermetar pokazao skretanje od 40 podeoka, koliko podeoka u tom slučaju iznosi skretanje voltmetra?

Rešenje:



Iz definicije karakteristične otpornosti i opsega voltmetra možemo odrediti njegovu unutrašnju otpornost.

$$R_V^{'} = 48\ \frac{\Omega}{\mathrm{V}} = \frac{R_V}{U_{\max}} \Rightarrow R_V = 48\ \frac{\Omega}{\mathrm{V}} \cdot 2.5\ \mathrm{V} = 120\ \Omega$$

Iz definicije karakteristične otpornosti i opsega ampermetra možemo odrediti njegovu unutrašnju otpornost.

$$R_A^{'} = 10\ \Omega\mathrm{A} = R_A \cdot I_{\max} \Rightarrow R_A = \frac{R_A^{'}}{I_{\max}} = \frac{10\ \Omega\mathrm{A}}{0.4\ \mathrm{A}} = 25\ \Omega$$

Napon na ampermetru, koji je vezan na mestu voltmetra, se određuje po formuli:

$$U_A = R_A \cdot I_A = R_A \cdot \left\{ \frac{40\ \mathrm{pod}}{100\ \mathrm{pod}} \cdot 0.4\ \mathrm{A} \right\} \Rightarrow U_A = 4\ \mathrm{V}$$

Ovaj napon je razdeljen rednom vezom unutrašnje otpornosti voltmetra i nepoznate otpornosti koju merimo.

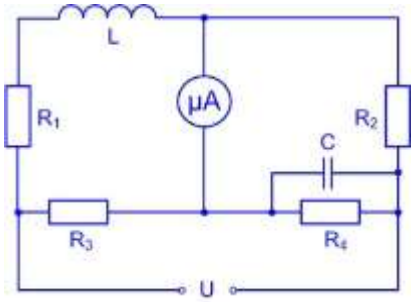
$$U_V = U_A \cdot \frac{R_V}{R_V + R_x}$$

$$U_V = 4\ \mathrm{V} \cdot \frac{120\ \Omega}{120\ \Omega + 146.67\ \Omega} \Rightarrow U_V = 1.80\ \mathrm{V}$$

$$U_V / \alpha = U_{\max} / \alpha_{\max}$$

$$\alpha = U_V \bullet \alpha_{\max} / U_{\max} = 1.80\ \mathrm{V} \bullet 100\ \mathrm{pod} / 2.5\ \mathrm{V} = 72\ \mathrm{pod}$$

58. Za koliko se promeni struja mikroampermetra u naizmeničnom mostu u okolini ravnotežnog stanja, kada dođe do promene vrednosti induktivnosti L za 0.1 %? Most se napaja iz izvora prostoperiodičnog napona frekvencije 50 Hz i efektivne vrednosti U = 300 mV.



R_1 = 0.5 kΩ, $R_2 = R_3$ = 1 kΩ, R_4 = 2 kΩ, L = 100 mH, C = 100 nF

Rešenje:

Ako sve elemente mosta, izuzev mikroampermetra, predstavimo Tevenenovim elementima, imaćemo:

$$\underline{Z}_T = \left(\underline{Z}_4 \| R_3\right) + \left(R_2 \| \underline{Z}_1\right)$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 \| \frac{1}{j\omega C} = \frac{R_4 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_4 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_4}{j\omega R_4 C + 1}$$

$$\underline{Z}_4 = \frac{R_4\left(1 - j\omega R_4 C\right)}{\left(\omega R_4 C\right)^2 + 1} \Rightarrow \underline{Z}_4 = 1992 - j\,125.1$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L \Rightarrow \underline{Z}_1 = 500 + j\ 31.4$$

$$\underline{Z}_T = \frac{\underline{Z}_4 \cdot R_3}{\underline{Z}_4 + R_3} + \frac{R_2 \cdot \underline{Z}_1}{R_2 + \underline{Z}_1} = \frac{\left(1992 - j125.1\right)\cdot 1000}{1992 - j125.1 + 1000} + \frac{\left(500 + j31.4\right)\cdot 1000}{500 + j31.4 + 1000}$$

$$\underline{Z}_T = \frac{\left(1992 - j125.1\right)\cdot 1000}{2992 - j125.1} + \frac{\left(500 + j31.4\right)\cdot 1000}{1500 + j31.4}$$

$$\underline{Z}_T = \frac{\left(1992 - j125.1\right)\cdot 1000}{2992 - j125.1} \cdot \frac{2992 + j125.1}{2992 + j125.1} + \frac{\left(500 + j31.4\right)\cdot 1000}{1500 + j31.4} \cdot \frac{1500 - j31.4}{1500 - j31.4}$$

$$\underline{Z}_T = \frac{\left(1992 - j125.1\right)\cdot 1000 \cdot \left(2992 + j125.1\right)}{2992^2 + 125.1^2} + \frac{\left(500 + j31.4\right)\cdot 1000 \cdot \left(1500 - j31.4\right)}{1500^2 + 31.4^2}$$

$$\underline{Z}_T = \frac{\left(1992 - j125.1\right)\cdot\left(2992 + j125.1\right)}{8967.7} + \frac{\left(500 + j31.4\right)\cdot\left(1500 - j31.4\right)}{2251.0}$$

$$\underline{Z}_T = \frac{\left(1992 \cdot 2992 + 125.1 \cdot 125.1\right) + j125.1 \cdot \left(-2992 + 1992\right)}{8967.7} +$$

$$+ \frac{\left(500 \cdot 1500 + 31.4 \cdot 31.4\right) + j31.4 \cdot \left(1500 - 500\right)}{2251.0}$$

$$\underline{Z}_T = 666.4 - j13.95 + 333.6 + j13.95$$

$$\underline{Z}_T = 1000$$

Modu ekvivalentne impedanse je:

$$\left|\underline{Z}_T\right| = 1000\ \Omega$$

Ekvivalentni Tevenenov napon možemo odrediti kao razliku potencijala na krajevima mikroampermetra. Potencijal na gornjem kraju mikroampermetra je definisan razdelnikom koji čine R_2 i Z_1. Potencijal na donjem kraju je definisan otpornikom R_3 i impedansom Z_4.

$$\underline{E_T} = \underline{E} \cdot \frac{R_2 \cdot \left(\underline{Z_4} + R_3\right) - \underline{Z_4}\left(R_2 + \underline{Z_1} + j\omega \cdot \Delta L\right)}{\left(R_2 + \underline{Z_1} + j\omega \cdot \Delta L\right)\left(\underline{Z_4} + R_3\right)}$$

$$\underline{E_T} = \underline{E} \cdot \frac{R_2 \cdot \underline{Z_4} + R_2 \cdot R_3 - \underline{Z_4} \cdot R_2 - \underline{Z_4} \cdot \underline{Z_1} - \underline{Z_4} \cdot j\omega \cdot \Delta L}{\left(R_2 + \underline{Z_1} + j\omega \cdot \Delta L\right)\left(\underline{Z_4} + R_3\right)}$$

$$\underline{E_T} = \underline{E} \cdot \frac{R_2 \cdot R_3 - \underline{Z_4} \cdot \underline{Z_1} - \underline{Z_4} \cdot j\omega \cdot \Delta L}{\left(R_2 + \underline{Z_1} + j\omega \cdot \Delta L\right)\left(\underline{Z_4} + R_3\right)}$$

Most je u ravnoteži, ako je proizvod naspramnih impedansi međusobno jednak.

$$\underline{Z_1} \cdot \underline{Z_4} = R_2 \cdot R_3$$

Pa nam nakon skraćenja ostaje:

$$\underline{E_T} = \underline{E} \cdot \frac{\underline{Z_4} \cdot j\omega \cdot \Delta L}{\left(R_2 + \underline{Z_1} + j\omega \cdot \Delta L\right)\left(\underline{Z_4} + R_3\right)}$$

Promenu induktivnosti u imenioucu možemo zanemariti u odnosu na mnogo veće sabirke.

$$\left|\underline{E_T}\right| = E \cdot \frac{\left|\underline{Z_4}\right| \cdot 2\pi f \cdot \Delta L}{\left|R_2 + \underline{Z_1}\right| \cdot \left|\underline{Z_4} + R_3\right|}$$

$$\left|\underline{E_T}\right| = 0.3 \cdot \frac{\sqrt{1992^2 + 125.1^2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot \frac{0.1}{100} \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{\left|1000 + 500 + j\ 31.4\right| \cdot \left|1992 - j\ 125.1 + 1000\right|}$$

$$\left|\underline{E_T}\right| = \frac{0.3 \cdot 1995.92 \cdot 0.031419}{\sqrt{1500^2 + 31.4^2} \cdot \sqrt{2992^2 + 125.1^2}}$$

$$\left|\underline{E_T}\right| = \frac{18.81}{1500.32 \cdot 2994.61} = 4.1\mu\text{V}$$

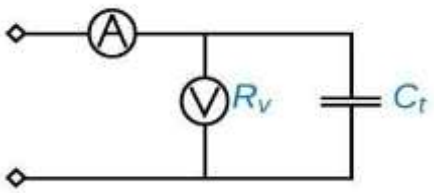
$$I_N = \frac{\left|\underline{E_T}\right|}{\left|\underline{Z_T}\right|} = \frac{4.1\ \mu\text{V}}{1000\ \Omega}$$

$$I_N = 4.1\text{nA}$$

59. Kapacitivnost kondenzatora *C* se meri UI metodom, naponskim spojem. Ampermetar ima unutrašnju otpornost koja je N=7 puta manja od impedanse kondenzatora *C*, a voltmetar ima unutrašnju otpornost N puta veću od impedanse kondenzatora *C*. Odrediti vrednost sistematske greške merenja koja nastaje usled konačnih otpornosti instrumenata. Koristi se izvor prostoperiodičnog napona amplitude 12 V, frekvencije 60 Hz.

Rešenje:

Količnik izmerenog napona i struje predstavlja moduo impedanse. Ako zanemarimo otpornost voltmetra, to će biti impedansa sačinjena od kapacitivnosti, koju ćemo nazvati C_m, odnosno merena vrednost kapacitivnosti. Tačnu vrednost kapacitivnosti - C_t, ćemo dobiti ako uzmemo u obzir konačnu otpornost voltmetra.



$$\frac{U}{I}=\left|R_v \| \frac{1}{j\omega C_t}\right|=\frac{1}{\omega C_m}=\left|\frac{R_v\cdot\frac{1}{j\omega C_t}}{R_v+\frac{1}{j\omega C_t}}\right|$$

$$\frac{1}{\omega C_m}=\frac{R_v}{\left|1+jR_v\omega C_t\right|}=\frac{R_v}{\sqrt{1+\left(R_v\omega C_t\right)^2}}\ ,\ R_v=\frac{N}{\omega C_t}$$

$$\frac{1}{\omega C_m}=\frac{\frac{N}{\omega C_t}}{\sqrt{1+\left[\frac{N}{\omega C_t}C_t\omega\right]^2}}=\frac{\frac{N}{\omega C_t}}{\sqrt{1+N^2}}$$

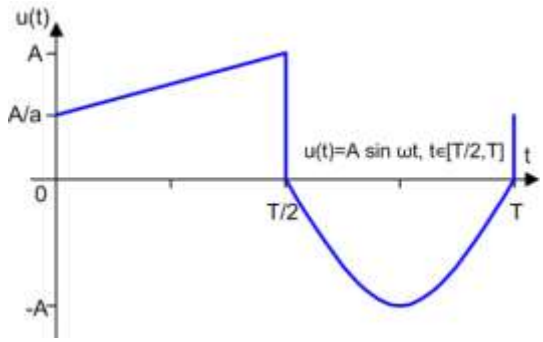
$$\frac{1}{C_m}=\frac{1}{C_t}\cdot\frac{N}{\sqrt{1+N^2}}\Rightarrow\frac{C_m}{C_t}=\frac{\sqrt{1+N^2}}{N}$$

$$\Gamma=\frac{\sqrt{1+N^2}}{N}-1$$

$$\Gamma_{\%}=100\left[\sqrt{\frac{1}{N^2}+1}-1\right]=1.0\ \%$$

NAPOMENA: Vrednosti napona i frekvencije su nepotrebne u ovom zadatku.

60. Napon talasnog oblika kao na slici, dovodi se na voltmetar sa kretnim kalemom i dvostranim ispravljačem, podešen da pokazuje efektivnu vrednost sinusnog napona. Odrediti apsolutnu vrednost relativne greške merenja efektivne vrednosti datog napona ovim voltmetrom.



A = 14.5 V, a = 5.0, f = 52 Hz.

Rešenje:
U prvoj poluperiodi, napon je linearno zavisan od vremena. U drugoj poluperiodi imamo sinusnu zavisnost čija je formula data.

$$0<t<\frac{T}{2}$$

$$u(t)=\frac{A}{a}+\left(A-\frac{A}{a}\right)\cdot\frac{2}{T}\cdot t\ ,\quad u(t)=\frac{A}{a}+\frac{A\cdot(a-1)}{a}\cdot\frac{2}{T}\cdot t\ ,\quad u(t)=\frac{A}{a}\cdot\left[1+\frac{2\cdot(a-1)}{T}\cdot t\right]$$

$$u(t)=k\cdot[1+L\cdot t]\ ,\quad k=\frac{A}{a};L=\frac{2\cdot(a-1)}{T}$$

Merena vrednost napona je ono što pokazuje voltmetar opisan u tekstu zadatka. To je srednja vrednost dvostrano ispravljenog napona. U prvoj poluperiodi je napon definisan linearnom formulom. U drugoj poluperiodi je napon negativan, pa se dejstvo dvostranog ispravljača ogleda u promeni znaka ispred sinusa u drugom integralu.

$$U_{mer} = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{T}\cdot\left\{\int_0^{T/2} k\cdot[1+L\cdot t]\cdot dt + \int_{T/2}^{T}(-A)\cdot\sin\omega t\cdot dt\right\}$$

$$U_{mer} = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{T}\cdot\left\{k\cdot\left(t+\frac{L}{2}\cdot t^2\right)\Big|_0^{T/2} + \frac{A\cdot T}{2\cdot\pi}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right)\Big|_{T/2}^{T}\right\}$$

$$U_{mer} = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{T}\cdot\left\{k\cdot\left(\frac{T}{2}+\frac{L}{2}\cdot\frac{T^2}{4}\right)+\frac{A\cdot T}{2\cdot\pi}\cdot 2\right\}$$

$$U_{mer} = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\left\{\frac{k}{2}+\frac{k\cdot L}{2}\cdot\frac{T}{4}+\frac{A}{\pi}\right\}$$

$$U_{mer} = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\left\{\frac{A}{a}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2\cdot(a-1)}{T}\cdot T\right)+\frac{A\cdot a}{\pi\cdot a}\right\}$$

$$U_{mer} = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{A}{a}\cdot\left\{\frac{1}{2}+\frac{a-1}{4}+\frac{a}{\pi}\right\}$$

$$U_{mer} = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{A}{a}\cdot\left\{\frac{\pi\cdot(a+1)+4\cdot a}{4\cdot\pi}\right\}$$

$$\underline{U_{mer} = \frac{A}{a}\cdot\frac{\pi\cdot(a+1)+4\cdot a}{8\cdot\sqrt{2}}}$$

$$U_{tač}{}^2 = \frac{1}{T}\cdot\left\{\int_0^{T/2} k^2\cdot[1+L\cdot t]^2\cdot dt + \int_{T/2}^{T} A^2\cdot\sin^2\omega t\cdot dt\right\}$$

$$U_{tač}{}^2 = \frac{1}{T}\cdot\left\{k^2\cdot\int_0^{T/2}[1+2\cdot L\cdot t+L^2\cdot t^2]^2\cdot dt + A^2\cdot\int_{T/2}^{T}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2 2\omega t\right)\cdot dt\right\}$$

$$U_{tač}{}^2 = \frac{1}{T}\cdot\left\{k^2\cdot\left(t+L\ \cdot t^2+\frac{L^2}{3}\cdot t^3\right)\Big|_0^{T/2}+\frac{A^2}{2}\cdot\frac{T}{2}\right\}$$

$$U_{tač}{}^2 = \frac{1}{T}\cdot\left\{k^2\cdot\left(\frac{T}{2}+L\cdot\frac{T^2}{4}+\frac{L^2}{3}\cdot\frac{T^3}{8}\right)+\frac{A^2}{4}\cdot T\right\}$$

$$U_{tač}{}^2 = k^2\cdot\left(\frac{1}{2}+L\cdot\frac{T}{4}+\frac{L^2\cdot T^2}{24}\right)+\frac{A^2}{4}$$

$$U_{tač}{}^2 = k^2\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{2\cdot(a-1)}{T}\cdot\frac{T}{4}+\frac{4\cdot(a-1)^2\cdot T^2}{T^2\cdot 24}\right]+\frac{A^2}{4}$$

$$U_{tač}{}^2 = \left(\frac{A}{a}\right)^2\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{a-1}{2}+\frac{(a-1)^2}{6}\right]+\frac{A^2}{4}\cdot\frac{a^2}{a^2}$$

$$U_{tač}{}^2 = \left(\frac{A}{a}\right)^2\cdot\left\{\frac{a}{2}+\frac{(a-1)^2}{6}+\frac{a^2}{4}\right\}$$

$$U_{tač}{}^2 = \left(\frac{A}{a}\right)^2\cdot\frac{6\cdot a+2\cdot(a^2-2\cdot a+1)+3\cdot a^2}{12} = \left(\frac{A}{a}\right)^2\cdot\frac{5\cdot a^2+2\cdot a+2}{12}$$

$$U_{tač} = \frac{A}{a} \cdot \frac{\sqrt{5 \cdot a^2 + 2 \cdot a + 2}}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

Relativno iskazana greška merenja napona je data izrazom:

$$\Gamma_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{U_{mer} - U_{tač}}{U_{tač}} \right) = 100 \cdot \left(\frac{U_{mer}}{U_{tač}} - 1 \right) = 100 \cdot \left(\frac{\frac{A}{a} \cdot \frac{\pi \cdot (a+1) + 4 \cdot a}{8 \cdot \sqrt{2}}}{\frac{A}{a} \cdot \frac{\sqrt{5 \cdot a^2 + 2 \cdot a + 2}}{2 \cdot \sqrt{3}}} - 1 \right)$$

$$\Gamma_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\pi \cdot (a+1) + 4 \cdot a}{\sqrt{5 \cdot a^2 + 2 \cdot a + 2}} - 1 \right)$$

61. Kolika sistematska greška merenja kapacitivnosti elektrolitskog kondenzatora nastaje, ako se ne primeti da je greškom izostavljen pomoćni kondenzator koji bi trebao biti redno vezan sa voltmetrom? Poznat je odnos vrednosti jednosmernog napona *E* i efektivne vrednosti naizmenične komponente napona *U*, *E/U=k=4.* Ampermetar i voltmetar smatrati idealnim.

Rešenje: Ako je šema ispravno povezana, onda voltmetar meri efektivnu vrednost naizmenične komponente, pošto kondenzator "preuzme" kompletnu jednosmernu komponentu. Ovde je kondenzator izostavljen, tako da na krajevima voltmetra postoji suma jednosmernog i naizmeničnog napona. Voltmetar meri efektivnu vrednost sume dva napona. Pošto šema nije dobro povezana, čak i primenom ispravne formule, nećemo dobiti pravu (tačnu) vrednost kapacitivnosti:

$$\frac{1}{\omega \cdot C_{xm}} = \frac{U_V}{I_A} \quad \Rightarrow \quad C_{xm} = \frac{I_A}{\omega \cdot U_V}$$

Da bismo dobili pravu vrednost kapacitivnosti potrebno je u gornjoj formuli, umesto pokazivanja voltmetra, imati efektivnu vrednost naizmenične komponente napona.

$$C_{xt} = \frac{I_A}{\omega \cdot U}$$

Potrebno je odrediti vezu između pokazivanja voltmetra i efektivne vrednosti naizmenične komponente napona.

$$U_V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[E + U\sqrt{2} \sin(\omega t) \right]^2 \cdot dt}$$

$$U_V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[E^2 + 2EU\sqrt{2} \sin(\omega t) + 2U^2 \sin^2(\omega t) \right] \cdot dt}$$

Pošto je određeni integral prostoperiodične veličine nad celim brojem perioda nula, srednji član otpada.

$$U_V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[E^2 + 2U^2 \sin^2(\omega t) \right] \cdot dt}$$

$$U_V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[E^2 + 2U^2 \cdot \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\right]\cdot dt}$$

$$U_V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[E^2 + U^2 - U^2\cos\left(2\omega t\right)\right]\cdot dt}$$

Određeni integral nad celim brojem perioda prostoperiodične funkcije je nula, pa otpada treći sabirak.

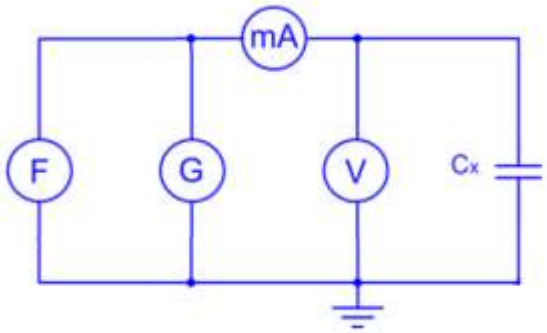
$$U_V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[E^2 + U^2\right]\cdot dt} = \sqrt{E^2 + U^2}$$

$$\Gamma_{\%} = \left[\frac{C_{xm}}{C_{xt}} - 1\right]\cdot 100 = \left[\frac{\frac{I_A}{\omega\cdot U_V}}{\frac{I_A}{\omega\cdot U}} - 1\right]\cdot 100 = \left[\frac{\frac{I_A}{\omega\cdot\sqrt{U^2+E^2}}}{\frac{I_A}{\omega\cdot U}} - 1\right]\cdot 100$$

$$\Gamma_{\%} = \left[\frac{U}{\sqrt{U^2+E^2}} - 1\right]\cdot 100 = \left[\frac{U}{U\sqrt{1+\left(\frac{E}{U}\right)^2}} - 1\right]\cdot 100$$

$$\Gamma_{\%} = \left[\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - 1\right]\cdot 100 = \left[\frac{1}{\sqrt{1+4^2}} - 1\right]\cdot 100 = -75.7\ \%$$

62. Kapacitivnost blok kondenzatora C_X meri se kolom sa slike. Koriste se digitalni instrumenti za naizmenične veličine: miliampermetar opsega 20 mA, voltmetar opsega 20 V i frekvencmetar opsega 200 Hz. Izmerene su vrednosti od 15.00 mA, 6.00 V i 180.0 Hz. Odrediti sigurne granice greške merenja kapacitivnosti C_X. Svi instrumenti imaju 3 ½ cifre. Njihove greške su date u tabeli, a unutrašnje otpornosti se mogu smatrati idealnim. Generator G je izvor prostoperiodičnog napona.



greška	mA	V	F
% opsega	0.5	0.5	0.5
% očitavanja	1.5	0.5	0.2
LSD	5	2	1

Rešenje:

Polazimo od izraza za određivanje kapacitivnosti na osnovu pokazivanja instrumenata.

$$C_X = \frac{I}{2\pi fU}$$

Ako uradimo logaritam leve i desne strane dobijamo, lakše je odrediti totalni izvod leve i desne strane.

$$\ln(C_X) = \ln(I) - \ln(2\pi) - \ln(f) - \ln(U)$$

$$\frac{\Delta C_X}{C_X} = \frac{\Delta I}{I} - \frac{\Delta f}{f} - \frac{\Delta U}{U}$$

Za sigurne granice greške uzimamo apsolutne vrednosti svakog od sabiraka.

$$\left|\frac{\Delta C_X}{C_X}\right| \le \left|\frac{\Delta I}{I}\right| + \left|\frac{\Delta f}{f}\right| + \left|\frac{\Delta U}{U}\right|$$

Vredsnosti apsolutnih grešaka miliampermetra, voltmetra i frekvencmetra se računaju na osnovu grešaka prikazanih u tabeli.

$$\Delta I = \frac{0.5}{100} \cdot 20\ \text{mA} + \frac{1.5}{100} \cdot 15\ \text{mA} + 5 \cdot 0.01\ \text{mA} = 0.375\ \text{mA}$$

Sabirci u gornjem izrazu imaju značenje: 0.5 % od opsega (koji iznosi 20 mA), 1.5 % očitane vrednosti (15 mA) i 5 cifara najmanje važnosti (LSD - Least Significan Digit). Obzirom da je rezultat na miliampermetru ispisan u obliku 00.00 mA do 19.99 mA, zaključujemo da cifra najmanje važnosti ima težinu 0.01 mA.

$$\Delta U = \frac{0.5}{100} \cdot 20\ \text{V} + \frac{0.5}{100} \cdot 6\ \text{V} + 2 \cdot 0.01\ \text{V} = 0.15\ \text{V}$$

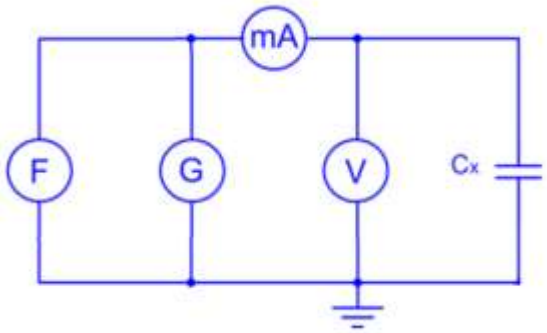
$$\Delta f = \frac{0.5}{100} \cdot 200\ \text{Hz} + \frac{0.2}{100} \cdot 180\ \text{Hz} + 1 \cdot 0.1\ \text{Hz} = 1.46\ \text{Hz}$$

Sada možemo odrediti vrednost relativno iskazane greške merenja kapacitivnosti.

$$\left|\frac{\Delta C_X}{C_X}\right| \le \left|\frac{0.375\ \text{mA}}{15\ \text{mA}}\right| + \left|\frac{1.46\ \text{Hz}}{180\ \text{Hz}}\right| + \left|\frac{0.15\ \text{V}}{6\ \text{V}}\right| = 0.0581$$

$$\left|\frac{\Delta C_X}{C_X}\right|_{\%} \le 5.81\,\%$$

63. Kapacitivnost blok kondenzatora C_X meri se kolom sa slike. Koriste se digitalni instrumenti za naizmenične veličine: miliampermetar opsega 2 mA, voltmetar opsega 20 V i frekvencmetar opsega 200 Hz. Izmerene su vrednosti od 1.822 mA, 19.00 V i 62.5 Hz. Svi instrumenti imaju 3 ½ cifre, a greške instrumenata su date u tabeli. Generator G je izvor prostoperiodičnog napona. Odrediti relativno iskazanu vrednost sistematske greške koja nastaje ako se zanemari unutrašnja otpornost voltmetra koja iznosi $100\ \text{k}\Omega$.



greška	mA	V	F
% opsega	0.5	0.5	0.5
% očitavanja	1.5	0.5	0.2
LSD	5	2	1

Rešenje: Za razliku od prethodnog zadatak u kojem se traže sigurne granice greške merenja, ovde se traži sistematska greška. Na sistematsku grešku ne utiču podaci o greškama instrumenata dati u tabeli. Izvor sistematske greške je zanemarivanje unutrašnje otpornosti voltmetra.

Ukoliko zanemarimo prisustvo konačne otpornosti voltmetra, dobićemo merenu vrednost kapacitivnosti. U tom slučaju, količnik očitanog napona i struje predstavlja moduo impedanse kondenzatora C_X.

$$\frac{U}{I}=\left|\frac{1}{j\omega C_{mer}}\right|=\frac{1}{\omega C_{mer}} \quad \Rightarrow \quad C_{mer}=\frac{I}{\omega U}$$

Ako uzmemo u obzir postojanje otpornosti voltmetra, dobićemo tačnu vrednost kapacitivnosti. Tada količnik napona i struje predstavlja moduo ekvivalentne impedanse koja se sastoji od paralelne veze kapacitivnosti i otpornosti voltmetra.

$$\frac{U}{I}=\left|R_V \left\| \frac{1}{j\omega C_{tac}}\right.\right|=\left|\frac{R_V\cdot\frac{1}{j\omega C_{tac}}}{R_V+\frac{1}{j\omega C_{tac}}}\right|=\left|\frac{R_V}{j\omega C_{tac}R_V+1}\right|=\frac{R_V}{\sqrt{\left(\omega C_{tac}R_V\right)^2+1^2}}$$

$$\left(\frac{U}{I}\right)^2=\frac{R_V{}^2}{\left(\omega C_{tac}R_V\right)^2+1} \quad \Rightarrow \quad C_{tac}=\frac{1}{\omega R_V}\sqrt{\left(\frac{R_V I}{U}\right)^2-1}$$

Relativna greška se računa na osnovu merene i tačne vrednosti kapacitivnosti.

$$\Gamma_{rel}=\frac{C_{mer}-C_{tac}}{C_{tac}}=\frac{C_{mer}}{C_{tac}}-1$$

$$\Gamma_{rel}=\frac{\frac{I}{\omega U}}{\frac{1}{\omega R_V}\sqrt{\left(\frac{R_V I}{U}\right)^2-1}}-1=\frac{IR_V}{U\sqrt{\left(\frac{R_V I}{U}\right)^2-1}}-1$$

$$\Gamma_{rel}=\frac{1.822\ \text{mA}\cdot 100\ \text{k}\Omega}{19\ \text{V}\sqrt{\left(\frac{100\ \text{k}\Omega\cdot 1.822\ \text{mA}}{19\ \text{V}}\right)^2-1}}-1=0.00548$$

$$\Gamma_{rel\%}=0.548\ \%$$

64. Konstantna temperatura se meri digitalnim termometrom sa 4 ½ cifre, mernog opsega 200 °C. Izvršeno je 25 merenja ove temperature. Dobijena je srednja vrednost temperature od 123.45 °C i standardna devijacija rezultata merenja 1.49 °C. Greška instrumenta iznosi 0.2 % opsega + 0.5 % očitane vrednosti + 9 digita. Kolika je standardna merna nesigurnost rezultata merenja temperature?

Rešenje: Na displeju sa 4 i 1/2 cifre mogu da prikažu prirodni brojevi od 0 do 19999. Uključivanjem decimalne tačke, ovaj opseg je "pretvoren" u opseg temperature od 0 °C do 199.99 °C (vrednost 200.00 °C praktično ne može biti prikazana!). Sada smo u stanju da odredimo kolika je vrednost cifre na poslednjem mestu: 0.01 °C.

Merna nesigurnost se u ovom slučaju sastoji od dve komponente. Zbog činjenice da se vrši više merenja (u ovom slučaju 25 merenja) i da je dobijeno rasipanje rezultata karakterisano standardnom devijacijom 1.49 °C, definisana je merna nesigurnost tipa A.

$$u_A=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1.49\ ^{\circ}\text{C}}{\sqrt{25}}=0.298\ ^{\circ}\text{C}$$

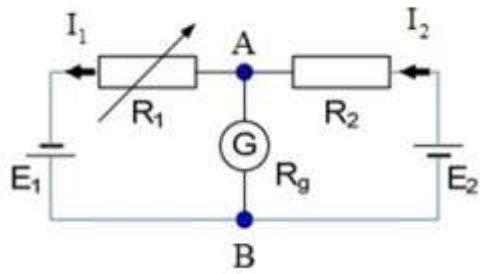
Druga komponenta merne nesigurnosti je tipa B i potiče od deklarisane greške instrumenta. Pošto nije definisana vrsta raspodele greške, pretpostavićeno da je u pitanju uniformna raspodela.

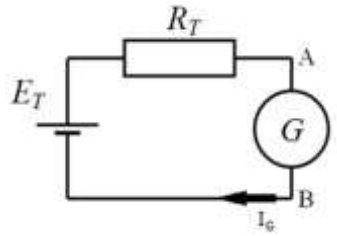
$$u_B = \frac{\Delta T}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{0.2}{100}200\ ^{\circ}\mathrm{C} + \frac{0.5}{100}123.45\ ^{\circ}\mathrm{C} + 9\cdot 0.01\ ^{\circ}\mathrm{C}}{\sqrt{3}} = \frac{1.10725\ ^{\circ}\mathrm{C}}{\sqrt{3}} = 0.639\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

Kombinovana merna nesigurnost se računa po izrazu:

$$u = \sqrt{u_A^{\ 2} + u_B^{\ 2}} = \sqrt{\left(0.298\ ^{\circ}\mathrm{C}\right)^2 + \left(0.639\ ^{\circ}\mathrm{C}\right)^2} = 0.705\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

65. Na slici je prikazano kompenzatorsko kolo gde su $E_1 = E_2 = 4.5\,\mathrm{V}$, $R_2 = 165\,\Omega$, i $R_g = 200\,\Omega$. Kolika je strujna osetljivost kola na promene otpornosti R_1 u blizini ravnotežnog stanja?





Rešenje: Ova šema se sastoji od dva izvora E_1 i E_2 koji su jednaki, promenljivog otpornika R_1, otpornika R_2 i galvanometra koji ima unutrašnju otpornost R_g. Za slučaj kada je $R_1 = R_2$ nema struje kroz galvanometar (istovremeno je i napon na krajevima galvanometra jednak nuli). Kada se otpornici razlikuju struja će proticati kroz galvanometar. Zbog toga ćemo R_1 izraziti kao $R_2 + \Delta R$. Ukoliko je $\Delta R = 0$ onda važi $R_1 = R_2$ i kolo na slici je u ravnoteži. U sledećim jednačinama će to biti pokazano.

$$I_1 = I_2$$

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{E}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2} = \frac{E}{R_2}$$

Iz ovih jednačina sledi da je $R_1 = R_2$. Dalje se zadatak rešava preko Tevenenove teoreme. Galvanometar ćemo ukloniti iz kola, ostatak kola predstaviti elementima Tevenenove teoreme, da bismo dobili jednostavnije kolo za koje je lako napisati izraz za struju kroz galvanometar.

$$R_T = R_{AB} = R_1 \| R_2 = (R_2 + \Delta R) \| R_2 \approx \frac{R_2}{2}$$

Pošto u kolu postoje dva izvora, rešićemo ga primenom metode superpozicije. Napisaćemo da je napon U_{AB} jednak zbiru vrednosti koja je posledica delovanja svakog od izvora, pri isključenom drugom izvoru.

$$E_T = U_{AB} = -E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = E \cdot \left(\frac{R_2 + \Delta R}{R_2 + \Delta R + R_2} - \frac{R_2}{R_2 + \Delta R + R_2} \right) = E \frac{\Delta R}{2R_2 + \Delta R}$$

$$E_T \approx E \frac{\Delta R}{2R_2}$$

Tek nakon sređivanja izraza za ΔR (oduzimanje dva vrlo slična člana u zagradi), moguće je zanemariti ΔR u imeniocu, jer je mnogo manje vrednosti od R_2. Sada je lako napisati izraz za struju kroz galvanometar.

$$I_G = \frac{E_T}{R_T + R_G} = E \frac{\Delta R}{2 \cdot R_2 \cdot \left(\frac{R_2}{2} + R_G \right)}$$

Iz gornje jednačine sledi da je:

$$\frac{I_G}{\Delta R} = \frac{E}{2R_2 (\frac{R_2}{2} + R_G)} = \frac{4.5\,\text{V}}{2 \cdot 165\,\Omega \cdot \left(\frac{165\,\Omega}{2} + 200\,\Omega \right)} = 48 \frac{\mu\text{A}}{\Omega}$$

Ovako iskazana osetljivost kompenzatora znači: pri promeni otpornika R_1 u okolini ravnotežnog stanja za 1Ω, struja kroz galvanometar će se promeniti za 48 μA.

66. Induktivnost kalema meri se miliampermetrom, voltmetrom i vatmetrom. Koriste se digitalni instrumenti sa $3\frac{1}{2}$ cifre. Miliampermetar ima opseg od $20\,\text{mA}$ sa greškom mernog opsega struje $0.5\,\%$, greškom merene vrednosti $0.6\,\%$ i $5\,\text{LSD}$. Voltmetar ima opseg od $200\,\text{V}$ sa greškom mernog opsega napona $0.7\,\%$, greškom merene vrednosti $0.5\,\%$, i $3\,\text{LSD}$. Vatmetar, načinjen za faktor snage 0.2, ima strujni opseg od $10\,\text{mA}$ i naponski od $100\,\text{V}$, sa greškom mernog opsega snage $0.75\,\%$, greškom merene vrednosti $0.5\,\%$, i $6\,\text{LSD}$. Izmerene su vrednosti od $10\,\text{mA}, 90\,\text{V}$ i $0.1\,\text{W}$. Kolike su sigurne granice greške merenja induktivnosti kalema?

Rešenje: Na induktivnosti kalema se razvija reaktivna snaga koja se određuje merenjem snage, napona i struje.

$$Q = (\omega L) I^2 = \sqrt{(UI)^2 - P^2}$$

Iz ove formule se može izraziti induktivnost:

$$L = \frac{1}{\omega} \frac{\sqrt{(UI)^2 - P^2}}{I^2}$$

Nakon ovoga treba da se odredi totalni izvod izraza za induktivnost po veličinama koje u sebi sadrže grešku, a to su struja, snaga i napon.

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial L}{\partial I} \Delta I + \frac{\partial L}{\partial P} \Delta P$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{2UI \cdot I}{I^2 \sqrt{(UI)^2 - P^2}} = \frac{1}{\omega} \frac{U}{\sqrt{(UI)^2 - P^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial I} = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{2UI \cdot U \cdot I^2}{2\sqrt{(UI)^2 - P^2}} - \sqrt{(UI)^2 - P^2} \cdot 2I}{I^4} = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{2UI \cdot U \cdot I^2 - 4I\left((UI)^2 - P^2\right)}{2\sqrt{(UI)^2 - P^2}}}{I^4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial I} = \frac{1}{\omega}\frac{2U^2I^3 - 4U^2I^3 + 4IP^2}{2I^4\sqrt{(UI)^2 - P^2}} = \frac{1}{\omega}\frac{2P^2 - U^2I^2}{I^3\sqrt{(UI)^2 - P^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial P} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2P}{I^2\sqrt{(UI)^2 - P^2}} = \frac{1}{\omega}\frac{P}{I^2\sqrt{(UI)^2 - P^2}}$$

Kada se odrede totalni izvodi izraza za induktivnost po veličinama koje u sebi sadrže grešku, treba odrediti greške koje su u ovom zadatku iskazane kombinovano. Greška svakog instrumenta se sastoji iz tri komponente: a) greška iskazana u odnosu na merni opseg, b) greška iskazana u odnosu na očitanu vrednost i c) greška iskazana brojem LSD-ova. Ove tri komponente treba sabrati da bi se dobile greške $\Delta U, \Delta I$ i ΔP.

LSD - *least significant digit* je najmanja vrednost poslednje cifre. U ovom zadatku koriste se digitalni instrumenti sa $3\frac{1}{2}$ cifre, što za voltmetar koji ima opseg $20\,\mathrm{V}$, znači da može pokazati vrednosti od 0.00 V do $19.99\,\mathrm{V}$, a najmanja vrednost poslednje cifre u ovom primeru iznosi $0.01\,\mathrm{V}$.

Greška voltmetra:

$$\Delta U = \frac{0.7}{100}200\,\mathrm{V} + \frac{0.5}{100}90\,\mathrm{V} + 3\cdot 0.1\,\mathrm{V} = 2.15\,\mathrm{V}$$

(LSD ovde iznosi $0.1\,\mathrm{V}$, opseg voltmetra je $200\,\mathrm{V}$, odnosno meri do $199.9\,\mathrm{V}$)

Greška miliampermetra:

$$\Delta I = \frac{0.5}{100}20\ \mathrm{mA} + \frac{0.6}{100}10\ \mathrm{mA} + 5\cdot 0.01\ \mathrm{mA} = 0.21\ \mathrm{mA}$$

(LSD ovde iznosi $0.01\,\mathrm{mA}$, opseg miliampermetra je $20\,\mathrm{mA}$, odnosno meri do $19.99\,\mathrm{mA}$, pa se odatle može izračunati)

Greška vatmetra:

$$P_{\max} = I_{\max}\cdot U_{\max}\cdot\cos\rho = 0.2\,\mathrm{W}$$

$$\Delta P = \frac{0.75}{100}0.2\,\mathrm{W} + \frac{0.5}{100}0.1\,\mathrm{W} + 6\cdot 0.0001\,\mathrm{W} = 0.0026\,\mathrm{W}$$

(LSD ovde iznosi 0.0001, opseg vatmetra je $0.2\,\mathrm{W}$, odnosno meri do $0.1999\,\mathrm{W}$)

$$|\Delta L| \le \left|\frac{1}{\omega}\frac{U}{\sqrt{(UI)^2 - P^2}}\Delta U\right| + \left|\frac{1}{\omega}\frac{2P^2 - U^2I^2}{I^3\sqrt{(UI)^2 - P^2}}\Delta I\right| + \left|-\frac{1}{\omega}\frac{P}{I^2\sqrt{(UI)^2 - P^2}}\Delta P\right|$$

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right| \le \frac{\omega I^2}{\sqrt{(UI)^2 - P^2}}\left\{\left|\frac{1}{\omega}\frac{U}{\sqrt{(UI)^2 - P^2}}\Delta U\right| + \left|\frac{1}{\omega}\frac{2P^2 - U^2I^2}{I^3\sqrt{(UI)^2 - P^2}}\Delta I\right| + \left|\frac{1}{\omega}\frac{P}{I^2\sqrt{(UI)^2 - P^2}}\Delta P\right|\right\}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \left|\frac{U\cdot I^2}{(UI)^2 - P^2}\Delta U\right| + \left|\frac{2P^2 - U^2I^2}{I^3\left((UI)^2 - P^2\right)}\cdot I^2\cdot\Delta I\right| + \left|\frac{P^2}{(UI)^2 - P^2}\Delta P\right|$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \left|\frac{U^2\cdot I^2}{(UI)^2 - P^2}\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{2P^2 - U^2I^2}{\left((UI)^2 - P^2\right)}\cdot\frac{\Delta I}{I}\right| + \left|\frac{P^2}{(UI)^2 - P^2}\frac{\Delta P}{P}\right|$$

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right| \le \frac{1}{(UI)^2 - P^2}\left\{\left|U^2I^2\cdot\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|2P^2 - U^2I^2\right|\cdot\frac{\Delta I}{I}\right| + \left|P^2\cdot\frac{\Delta P}{P}\right|\right\}$$

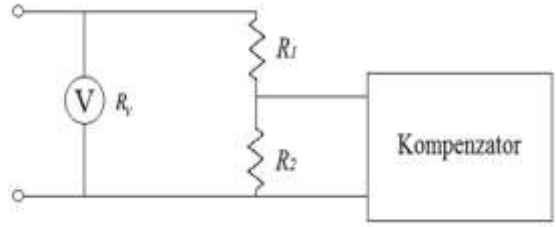
$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right| \le \frac{1}{(90-0.01)^2-0.1^2}\left\{\left|90^2\cdot 0.01^2\cdot\frac{2.15}{90}\right|+\left|\left|2\cdot 0.1^2-90^2\cdot 0.01^2\right|\cdot\frac{0.21}{10}\right|+\left|\frac{0.1^2}{0.1}\cdot 0.0026\right|\right\}$$

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right| \le 1.25\cdot\left\{\left|0.01935\right|+\left|0.01659\right|+\left|0.00026\right|\right\}=0.04525$$

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right|_{\%} \le 4.525\%$$

67. Voltmetar sa kretnim kalemom, opsega $150\,\mathrm{V}$, klase $0.20\,\%$ i karakteristične unutrašnje otpornosti $0.666\,\mathrm{k\Omega/V}$, overava se samo u jednoj mernoj tački, pomoću kompenzatora dozvoljene greške od $\pm 0.25\,\mathrm{mV}$ i naponskog razdelnika odnosa $150:1$, kao na slici. Ako je na voltmetru očitano $120\,\mathrm{V}$, a na skali potenciometra kompenzatora podeok koji odgovara naponu od $0.8025\,\mathrm{V}$, odrediti maksimalnu dozvoljenu grešku naponskog razdelnika sa kojom je moguće izvršiti validnu overu voltmetra (kolo za overu mora imati barem tri puta manju grešku od ispitanog uređaja). $R_2 = 100\,\Omega$.

Rešenje:



Ovde vršimo overu voltmetra korišćenjem sistema koji se sastoji od delitelja napona i kompnezatora. Tekstom zadatka je naglašeno koji uslov mora da zadovoljava oprema kojom se vrši overa (etalon): mora da ima bar tri puta manju grešku od ispitivanog instrumenta - voltmetra.

Maksimalna greška voltmetra je određena opsegom i klasom tačnosti.

$$kl_v = \frac{\max|\Delta U|}{U_{\max}}\cdot 100 \Rightarrow \max|\Delta U| = 0.3\,\mathrm{V}$$

Po uslovu zadatka greška etalona mora biti barem tri puta manja od greške voltmetra:

$$\Delta U_{etalon} \le \frac{1}{3}\max|\Delta U|$$

Etalon se sastoji iz naponskog delitelja faktorom n i kompenzatora. Vrednost očitanu na kompenzatoru množimo faktorom n da bismo dobili vrednost napona po etalonu. Vrednost po etalonu poredimo sa vrednošću koju pokazuje ispitivani voltmetar.

$$U_{etalon} = n\cdot E_{kompenzator}$$

Kako bi se dobila greška etalona radi se totalni izvod po n i $E_{kompenzator}$

$$\Delta U_{etalon} = \frac{\partial U_{etalon}}{\partial n}\Delta n + \frac{\partial U_{etalon}}{\partial E_{kompenzator}}\Delta E_{kompenzator}$$

$$\Delta U_{etalon} = E_{kompenzator}\cdot\Delta n + n\cdot\Delta E_{kompenzator} = 0.8025\,\mathrm{V}\cdot\Delta n + 150\cdot 0.25\,\mathrm{mV}$$

Iz poslednjeg izraza se možemo odrediti Δn.

$$\Delta U_{etalon} \le \frac{1}{3}\max|\Delta U|$$

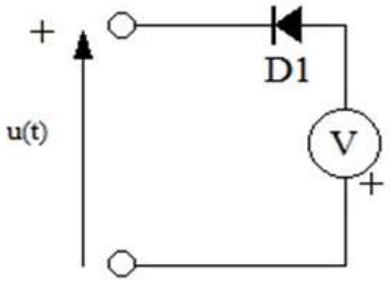
$$E_{kompenzator} \cdot \Delta n + n \cdot \Delta E_{kompenzator} = \frac{1}{3} 0.3\,\mathrm{V}$$

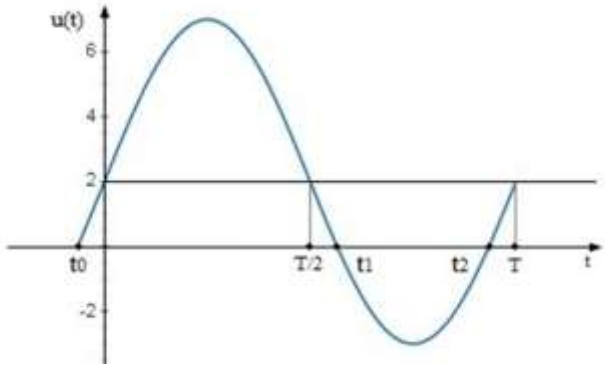
$$0.8025\,\mathrm{V} \cdot \Delta n + 150 \cdot 0.25\,\mathrm{mV} = 0.1\,\mathrm{V} \Rightarrow \Delta n = \frac{0.1\,\mathrm{V} - 150 \cdot 0.25\,\mathrm{mV}}{0.8025\,\mathrm{V}} = 0.07788$$

Maksimalna dozvoljena greška naponskog razdelnika iskazana u procentima (relativna vrednost) iznosi: $\frac{\Delta n}{n} \cdot 100 = 0.052\%$

68. Na voltmetar sa kretnim kalemom, opsega $15\,\mathrm{V}$ i karakteristične unutrašnje otpornosti $12.5\,\mathrm{k\Omega/V}$, povezana je dioda $\mathrm{D1}$, kao na slici. Na ulaz ovog kola je doveden talasni oblik napona dat kao: $u(t) = (\mathrm{A} + \mathrm{B} \cdot \sin 500t)\,\mathrm{V}$ pri čemu je $\mathrm{A} = 2.0$ i $\mathrm{B} = 5.0$. Odrediti apsolutnu grešku merenja efektivne vrednosti datog napona ovim kolom. Karakteristike diode se mogu smatrati idealnim.

Rešenje:





Imajući u vidu polaritet napona u(t) i usmerenost diode i voltmetra, možemo zaključiti da će voltmetar "videti" negativne delove napona u(t) kao pozitivne. Pozitivne vrednosti napona u(t) voltmetar neće "videti". Pokazivanje voltmetra će biti jednako negativnoj vrednosti srednje vrednosti negativnih napona u(t).

Minus ispred izraza za srednju vrednost napona potiče od neusaglašenosti polariteta napona u(t) i polariteta voltmetra. Ggranice integrala predstacljaju granice u kojima je napon u(t) negativan (zbog obrnuto postavljene diode u odnosu na polaritet napona u(t)).

$$U_{mer} = -\frac{1}{T} \cdot \int_{t1}^{t2} u(t) \cdot dt = U_v$$

Prvo se traži vrednost $\mathrm{t_0}$ i izračunavanje T:

$$u(t_0) = 0 \Rightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} \cdot \sin(\omega t_0) = 0$$

$$\sin(\omega t_0) = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$$

$$\omega t_0 = \arcsin(-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}})$$

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \arcsin(-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}) = -8.23 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.01256\,\mathrm{s}$$

Zatim se traže vrednosti $\mathrm{t_1}$ i $\mathrm{t_2}$:

$$t_1 = \frac{T}{2} + |t_0| = 7.1 \cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

$$t_2 = T - |t_0| = 11.73 \cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

Sada se računa U_{mer}. Postoje dva načina kako se ono može izračunati, prvi je preko vremena, a drugi je preko uglova.

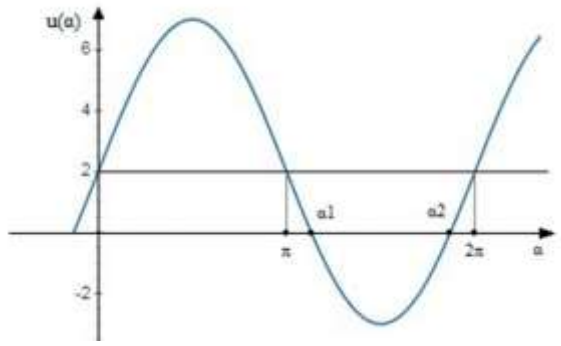
$$U_{mer} = -\frac{1}{T} \cdot \int_{t1}^{t2} U(t) \cdot dt = -\frac{1}{T} \cdot \int_{t1}^{t2} \left(2 + 5 \cdot \sin(500t)\right) \cdot dt = -\frac{1}{T} \cdot \int_{t1}^{t2} 2 \cdot dt - \frac{1}{T} \cdot \int_{t1}^{t2} 5 \cdot \sin(500t) \cdot dt$$

$$U_{mer} = -\frac{1}{T} \cdot 2 \cdot (t_2 - t_1) + \frac{1}{500} \cdot \frac{1}{T} \cdot 5 \cdot \left(\cos(500t_2) - \cos(500t_1)\right)$$

$$U_{mer} = -\frac{1}{0.01256\,\text{s}} \cdot 2 \cdot (11.73 \cdot 10^{-3}\ \text{s} - 7.1 \cdot 10^{-3}\ \text{s})\ \text{V} + \frac{1}{0.01256\,\text{s}} \cdot \frac{5}{500\ \text{rad/s}} \cdot (0.91\,\text{rad} + 0.91\,\text{rad})\ \text{V}$$

$$U_{mer} = -0.73\ \text{V} + 1.44\ \text{V} = 0.71\ \text{V}$$

Drugi način: Napon u(t) možemo posmatrati kao funkciju ugla. Tada imamo situaciju prikazanu na slici.



Sada je periodi signala 2π, veličina na horizontalnoj osi je ugao α, a ne vreme *t*, takođe ćemo umesto vremenskih odrednica t_0, t_1 i t_2, imati uglove α_0, α_1 i α_2.

Problem se opet svodi na određivanje negativne vrednosti srednje vrednosti signala u granicama od α_1 do α_2.

$$\alpha_0 = \arcsin(-\frac{\text{A}}{\text{B}}) = -0.4115\,\text{rad}$$

$$\alpha_1 = \pi + |\alpha_0|$$

$$\alpha_2 = 2\pi - |\alpha_0|$$

$$U_{mer} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} \left(\text{A} + \text{B} \cdot \sin\alpha\right) \cdot d\alpha = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} \text{A} \cdot d\alpha - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} \text{B} \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha$$

Digresija: $\int \sin\omega t \cdot dt = -\frac{1}{\omega}\cos\omega t$

$$U_{mer} = -\frac{1}{2\pi}\left\{\text{A} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) - \text{B} \cdot \left[\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right]\right\} = -\frac{1}{2\pi}\left\{\text{A} \cdot \left(2\pi - 2|\alpha_0| - \pi - |\alpha_0|\right) - \text{B} \cdot \left(\cos\alpha_0 + \cos\alpha_0\right)\right\}$$

Pošto je cos parna funkcija vrednosti α_1 i α_2 se zamenjuju α_0.

$$U_{mer} = -\frac{1}{2\pi}\left\{\text{A} \cdot \left(\pi - 2|\alpha_0|\right) - \text{B} \cdot 2 \cdot \cos\alpha_0\right\} = -0.159 \cdot (4.634 - 9.1)\ \text{V} = 0.71\ \text{V}$$

Sledeće se računa U_{tac}, a to je efektivna vrednost :

$$U_{tac} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(2 + 5 \cdot \sin(\omega t)\right)^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(4 + 20 \cdot \sin(\omega t) + 25 \cdot \sin^2(\omega t)\right) \cdot dt}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$U_{tac} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^T 4\cdot dt + \int_0^T 20\cdot\sin(\omega t)\cdot dt + \int_0^T \frac{25}{2}\cdot dt - \int_0^T \frac{25}{2}\cdot\cos 2\cdot(\omega t)\cdot dt\right]}$$

Vrednost drugog i četvrtog integrala će biti 0, zato što se radi o integralu prostoperiodične funkcije nad jednom, odnosno, nad dve cele periode.

$$U_{tac} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[4\cdot T + 12.5\cdot T\right]} = 4.06\ \text{V}$$

Apsolutna greška merenja iznosi:

$$\Gamma = U_{mer} - U_{tac} = -3.34\ \text{V}$$

Napomena: Neophodno koristiti arc funkcije tako da daju ugao u radijanima!

69. Faktor snage trofaznog simetričnog potrošača meri se metodom dva vatmetra. Očitana su skretanja kazaljke od +80 podeoka na prvom vatmetru, i -75 podeoka na drugom vatmetru. Oba vatmetra imaju identične karakteristike: skalu sa 100 podeoka, klasu tačnosti 0.2 %, kao i unutrašnje otpornosti naponskog i strujnog priključka koje možemo smatrati idealnim. Koliko iznose sigurne granice greške merenja faktora snage potrošača, u apsolutnom obliku?

Rešenje: Kod Aronovog spoja (metoda merenja pomoću dva vatmetra u trofaznom sistemu) znamo da vatmetri pokazuju snage po sledećim izrazima:

$$P_1 = I\cdot U\cdot\cos(30^\circ-\varphi),\quad P_2 = I\cdot U\cdot\cos(30^\circ+\varphi)$$

pri čemu je:

I efektivna vrednost fazne struje, uz pretpostavku da je simetričan potrošač, pa su sve tri fazne struje jednake,

U efektivna vrednost međufaznog napona, uz pretpostavku da je generator simetričan, pa su sva tri napona jednaki,

φ je fazni stav između odgovarajućih napona i struja.

Napravimo zbir i razliku pokazivanja vatmetara.

$$P_1 + P_2 = I\cdot U\cdot\left[\cos(30^\circ-\varphi)+\cos(30^\circ+\varphi)\right] = I\cdot U\cdot 2\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos\varphi = I\cdot U\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\varphi$$

$$P_1 - P_2 = I\cdot U\cdot\left[\cos(30^\circ-\varphi)-\cos(30^\circ+\varphi)\right] = I\cdot U\cdot 2\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin\varphi = I\cdot U\cdot\sin\varphi$$

Ako formiramo količnik ovih dveju formula, dobijamo:

$$\frac{P_1-P_2}{P_1+P_2} = \frac{I\cdot U\cdot\sin\varphi}{I\cdot U\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}\cdot\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}}tg\varphi$$

Neka je pokazivanje vatmetra srazmerno otklonu kazaljke:

$$P_1 = \alpha_1\cdot Cw,\quad P_2 = \alpha_2\cdot Cw$$

$$\frac{P_1-P_2}{P_1+P_2} = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)\cdot Cw}{(\alpha_1+\alpha_2)\cdot Cw} = \frac{1}{\sqrt{3}}tg\varphi,\ \varphi = arctg(\sqrt{3}\cdot\frac{(\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)},$$

$$\cos\varphi = \cos(arctg(\sqrt{3}\cdot\frac{(\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)}))$$

Iskoristimo vezu

$\cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, pa imamo da je $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+3\cdot(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2})^2}}$

$$\Delta\cos\varphi = \left|\frac{\partial\cos\varphi}{\partial\alpha_1}\cdot\Delta\alpha_1\right| + \left|\frac{\partial\cos\varphi}{\partial\alpha_2}\cdot\Delta\alpha_2\right|$$

$$\Delta\cos\varphi = \left|\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}}}{\partial\alpha_1}\cdot\Delta\alpha_1\right| + \left|\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}}}{\partial\alpha_2}\cdot\Delta\alpha_2\right|, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Delta\cos\varphi = \left|-\frac{1}{2\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot\frac{\partial\left(1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2\right)}{\partial\alpha_1}\cdot\Delta\alpha_1\right| +$$

$$+\left|-\frac{1}{2\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot\frac{\partial\left(1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2\right)}{\partial\alpha_2}\cdot\Delta\alpha_2\right|$$

$$\Delta\cos\varphi = \left|-\frac{1}{2\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)}{\partial\alpha_1}\cdot\Delta\alpha_1\right| +$$

$$+\left|-\frac{1}{2\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)}{\partial\alpha_2}\cdot\Delta\alpha_2\right|$$

$$\Delta\cos\varphi = \left| -\frac{1}{2\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot 6\cdot\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\frac{1\cdot(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_1-\alpha_2)\cdot 1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\cdot\Delta\alpha_1 \right| +$$

$$+\left| -\frac{1}{2\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot 6\cdot\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\frac{-1\cdot(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_1-\alpha_2)\cdot 1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\cdot\Delta\alpha_2 \right|$$

$$\Delta\cos\phi = \left| -\frac{1}{\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot 3\cdot\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\frac{2\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\cdot\Delta\alpha_1 \right| +$$

$$+\left| -\frac{1}{\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot 3\cdot\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\frac{(-2\alpha_1)}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\cdot\Delta\alpha_2 \right|$$

$$\Delta\cos\varphi = \left| -\frac{1}{\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot\frac{6\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\cdot\Delta\alpha_1 \right| +$$

$$+\left| -\frac{1}{\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot\frac{(-6\alpha_1)\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\cdot\Delta\alpha_2 \right|$$

Na osnovu definicije klase tačnosti vatmetra, određena je dozvoljena greška iskazana u podeocima.

$$kl_w = \frac{\max|\Delta P|}{P_{\max}}\cdot 100$$

$$P = Cw\cdot\alpha,\quad P_{\max} = Cw\cdot\alpha_{\max}, P_{\max} = 2000\,\mathrm{W},\ \alpha_{\max} = 100\,\mathrm{pod} \Rightarrow Cw = 20\,{}^{W}\!/_{pod}$$

$$kl_w = \frac{\max|\Delta P|}{P_{\max}}\cdot 100 = \frac{\max|\Delta\alpha|\cdot Cw}{Cw\cdot\alpha_{\max}}\cdot 100 \Rightarrow \max|\Delta\alpha| = \frac{kl_w}{100}\cdot\alpha_{\max} = 0.2\,\mathrm{pod}$$

Pošto su vatmetri isti, uzećemo da oba vatmetra mogu da greše po 0.2 podeoka.

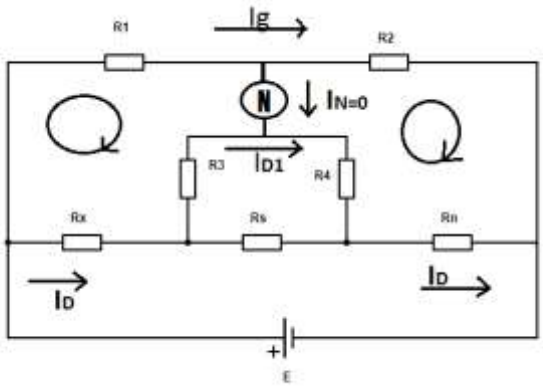
$$\Delta\cos\varphi = \left|\frac{6\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot\frac{\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\cdot\Delta\alpha_1\right| + \left|\frac{6\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot\frac{\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\cdot\Delta\alpha_2\right|$$

$$\Delta\cos\varphi = \frac{6\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{1+3\cdot\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^2}^3}\cdot\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}\cdot\Delta\alpha\cdot\left(|\alpha_2|+|\alpha_1|\right)$$

$$\Delta\cos\phi = 0,00149$$

70. Koliko iznosi otpornost *Rx* merena Tomsonovim mostom prikazanim na slici ako su u trenutku ravnoteže mosta: $R_N = 0.1\Omega,\ R_1 = R_3 = 50\Omega,\ R_2 = R_4 = 1\text{k}\Omega$ i $R_S = 0.1\text{m}\Omega$,

Rešenje: Kada je Tomsonov most u ravnoteži struja kroz indikator je 0. To znači da kroz otpornike R_1 i R_2 teče ista struja (I_G). Takođe, kroz otpornike R_X i R_N teče ista struja (I_D). Struja I_D protiče i kroz grupu otpornika R_3+R_4 u paraleli sa R_S.



Pošto kroz indikator nema struje, napon na njegovim krajevima je nula, pa se mogu napisati dve jednačine za označene konture:

$$R_1\cdot I_G = R_3\cdot I_{D1} + R_X\cdot I_D$$

$$R_2\cdot I_G = R_N\cdot I_D + R_4\cdot I_{D1}$$

Struja I_{D1} se može napisati na osnovu izraza za strujni razdelnik:

$$I_{D1} = \frac{R_S}{R_S+R_3+R_4}\cdot I_D$$

Sada možemo da zamenimo struju I_{D1} u prve dve formule.

$$R_1\cdot I_G = R_3\cdot\frac{R_S}{R_S+R_3+R_4}\cdot I_D + R_S\cdot I_D = \left(R_3\cdot\frac{R_S}{R_S+R_3+R_4}+R_X\right)\cdot I_D$$

$$R_2\cdot I_G = R_N\cdot I_D + R_4\cdot\frac{R_S}{R_S+R_3+R_4}\cdot I_D = \left(R_N+R_4\cdot\frac{R_S}{R_S+R_3+R_4}\right)\cdot I_D$$

Deljenjem gornje dve jednačine dolazi do skraćivanja struja i ostaje izraz u kojem figurišu samo otpornosti.

$$\frac{R_1 \cdot I_G}{R_2 \cdot I_G} = \frac{\left(R_3 \cdot \frac{R_S}{R_S + R_3 + R_4} + R_X \right) \cdot I_D}{\left(R_N + R_4 \cdot \frac{R_S}{R_S + R_3 + R_4} \right) \cdot I_D}$$

Preuređivanjem se dobija izraz za R_X.

$$R_X = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_N + \frac{R_4 \cdot R_S}{\left(R_S + R_3 + R_4 \right)} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_3}{R_4} \right)$$

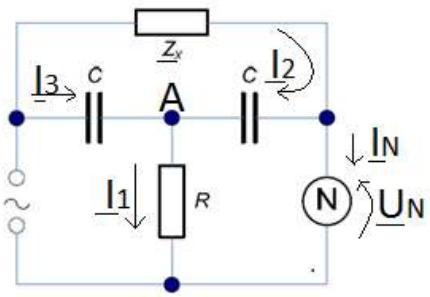
Gornji izraz se značajno uprošćava ukoliko se obezbedi da je razlika u zagradi jednaka nuli. U ovom zadatku je zadovoljen taj uslov, pa se nepoznata otpornost određuje po izrazu:

$$R_X = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_N = 5\,\mathrm{m\Omega}$$

71.

Most za merenje impedance, prikazan na slici, u ravnoteži je za vrednosti parametara R=1.5 kΩ, C=3.3 nF i za frekvenciju napona napajanja f=10 kHz.

Koliki je moduo impedance Zx?



Rešenje: Jednačina za ravnotežu struja u čvoru A glasi:

$\underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_1$, odavde sledi $\underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \underline{I}_3$

Kada je kolo u ravnoteži nema struje kroz indikator nule, što istovremeno znači da je na krajevima indikatora nule napon jednak nuli. Pogrešno je indikator nule zameniti kratkim spojem, pošto kroz kratak spoj može da teče bilo koja struja. Situacija da su struja i napon indikatora nule jednaki nuli se dešava samo na jednoj frekvenciji.

Možemo napisati dve jednačine po drugom Kirhofovom zakonu.

$$\underline{I}_2 \cdot \frac{1}{j\omega C} + \underline{I}_1 \cdot R = \underline{U}_N = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_2 \cdot \frac{1}{j\omega C} = -\underline{I}_1 \cdot R$$

$$\underline{I}_2 \cdot (\underline{Z}x + \frac{1}{j\omega C}) = \underline{I}_3 \cdot \frac{1}{j\omega C} = \left(\underline{I}_1 - \underline{I}_2 \right) \cdot \frac{1}{j\omega C} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_2 \cdot \left\{ \underline{Z}_X + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C} \right\} = \underline{I}_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

Deljenjem prethodne dve jednačine ćemo se osloboditi struja.

$$\frac{\underline{I}_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{\underline{I}_2 \cdot \left\{ \underline{Z}_X + \frac{2}{j\omega C} \right\}} = \frac{-\underline{I}_1 \cdot R}{\underline{I}_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}} \quad \Rightarrow \quad -R \cdot \left\{ \underline{Z}_X + \frac{2}{j\omega C} \right\} = \frac{1}{\left(j\omega C \right)^2} = -\frac{1}{\left(\omega C \right)^2}$$

$$R \cdot \left\{ R_X + jX_X + \frac{2}{j\omega C} \right\} = \frac{1}{\left(\omega C \right)^2}$$

Prethodna kompleksna jednačin ustvari sadrži dve realne jednačine koje dobijamo kada izjednačimo realne i imaginarne delove sa obe strane znaka jednakosti.

$$R \cdot R_X = \frac{1}{(\omega C)^2} \quad \Rightarrow \quad R_X = \frac{1}{R \cdot (\omega C)^2}$$

$$jX_X + \frac{2}{j\omega C} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_X = \frac{2}{\omega C}$$

Moduo impedanse Z_X je dat izrazom

$$Z_X = \sqrt{R_X{}^2 + X_X{}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R \cdot (\omega C)^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\omega C}\right)^2} = \frac{1}{\omega C}\sqrt{\left(\frac{1}{R\omega C}\right)^2 + (2)^2}$$

$$Z_X = 18.3\,\mathrm{k\Omega}$$

72.